

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УНИТАРНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ
“ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
АВТОМАТИКИ ИМЕНИ Н.Л. ДУХОВА”**

ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Соловьев Александр Сергеевич

**МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ
ПРОЦЕССА РАДИАЦИОННОГО ЗАХВАТА
В ЯДЕРНЫХ КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМАХ**

Специальность 01.04.16 – “Физика атомного ядра и элементарных частиц”

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Игашов Сергей Юрьевич

Москва – 2014

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Формализм алгебраической версии метода резонирующих групп (АВМРГ).....	22
1.1. Базисные волновые функции и система уравнений АВМРГ	22
1.2. Гамильтониан ядерной системы	25
1.3. Система уравнений АВМРГ для дискретного спектра.....	28
1.4. Система уравнений АВМРГ для непрерывного спектра.....	29
1.5. Внутренние волновые функции кластеров	30
1.6. Техника производящих функций	32
1.7. Производящие матричные элементы оператора, представимого в виде суммы одно- и двухчастичных операторов	37
1.8. Матричные элементы операторов кинетической энергии и центрального взаимодействия в базисе АВМРГ	39
1.9. Матричные элементы операторов спин-орбитального и тензорного взаимодействий на базисных функциях АВМРГ	41
1.10. Техника рекуррентных соотношений.....	46
Глава 2. Радиационный захват в столкновениях составных частиц	51
2.1. Вероятность перехода ядра между связанными состояниями.....	51
2.2. Электрический мультипольный оператор.....	54

2.3. Магнитный мультипольный оператор.....	56
2.4. Сечение радиационного захвата.....	58
Глава 3. Реакция радиационного захвата ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$	60
3.1. Общие свойства.....	60
3.2. Вычисление матричных элементов операторов семинуклонной системы в кластерном представлении ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ в базисе АВМРГ	63
3.2.1. Производящие матричные элементы гамильтониана.....	63
3.2.2. Матричные элементы электрического дипольного оператора.....	70
3.2.3. Матричные элементы электрического квадрупольного оператора .	74
3.2.4. Матричные элементы магнитного дипольного оператора.....	77
3.3. Результаты расчетов и обсуждение	80
Глава 4. Реакция радиационного захвата ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$.....	94
4.1. Предварительные замечания	94
4.2. Вычисление матричных элементов операторов семинуклонной системы в кластерном представлении ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ в базисе АВМРГ	96
4.2.1. Производящие матричные элементы гамильтониана.....	96
4.2.2. Матричные элементы электрических дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного операторов.....	98
4.3. Результаты расчетов и обсуждение	101
Заключение.....	112
Литература.....	115

Введение

В настоящее время одной из бурно развивающихся областей науки является ядерная астрофизика, которая находится на стыке ядерной физики и астрофизики. Ядерная астрофизика изучает ядерные процессы, протекающие в различных космических объектах и явлениях, в том числе ядерные реакции, которые происходили на дозвездной стадии развития Вселенной в первые секунды после ее образования. Одной из важнейших задач ядерной астрофизики является изучение процесса образования химических элементов во Вселенной – нуклеосинтеза [1–3]. Согласно доминирующим представлениям считается, что легчайшие химические элементы возникли в ходе дозвездной стадии развития Вселенной (первичный нуклеосинтез), а более тяжелые – в ходе звездной эволюции (звездный нуклеосинтез).

В последние годы ядерная астрофизика динамично развивается в связи с внедрением усовершенствованных моделей звезд и увеличением точности экспериментального определения сечений звездных реакций. Однако до сих пор серьезную проблему представляют собой реакции с составными заряженными частицами (ядрами) при энергиях, характерных для астрофизических процессов, так как эти энергии почти всегда значительно ниже кулоновского барьера. Поэтому ядерная астрофизика продолжает нуждаться в теоретических моделях, позволяющих достоверным образом вычислять значения сечений астрофизических ядерных реакций в той области энергий, для которой отсутствуют надежные экспериментальные данные. При этом теоретический расчет сечения сравнивается с имеющимися экспериментальными данными и если между ними достигается согласие, то предполагается, что полученная теоретическая кривая правильно воспроизводит сечение и в области более низких энергий. Наиболее последовательными и

обоснованными считаются экстраполяции экспериментальных данных, основанные на микроскопических ядерных моделях. Сечения прямых (нерезонансных) реакций при низких астрофизических энергиях проявляют резкую зависимость – экспоненциально падают с уменьшением энергии. При проведении экстраполяций для таких реакций вместо сечений используют связанные с ними астрофизические S -факторы, представляющие собой величины, из которых явно выделена экспоненциальная малость, обусловленная проницаемостью кулоновского барьера [1]. По этой причине астрофизические S -факторы имеют более плавную энергетическую зависимость и гораздо удобнее для экстраполяций.

Одним из наиболее последовательных микроскопических подходов в задачах рассеяния и реакций с участием составных ядер является метод резонирующих групп (МРГ) [4–7], который представляет собой реализацию кластерной модели. Использование полностью антисимметризованных волновых функций (точный учет принципа Паули), исключение движения общего центра масс (точный учет трансляционной инвариантности системы) и описание на единой основе состояний дискретного и непрерывного спектров ядерной системы являются несомненными достоинствами данного подхода. В традиционной формулировке одноканального варианта МРГ волновая функция относительного движения ядер (кластеров) ищется путем решения интегро-дифференциального уравнения (в случае многоканального варианта МРГ – решением системы зацепляющихся интегро-дифференциальных уравнений). Решение этого уравнения (системы уравнений) является весьма сложной вычислительной задачей [7], требующей громоздких численных расчетов.

Наряду с классическими вариантами МРГ существует также вариант реализации, основанный на разложении волновой функции относительного движения ядер (кластеров) по системе собственных функций трехмерного гармонического осциллятора (по базису осцилляторных функций). Это так называемая алгебраическая версия метода резонирующих групп (АВМРГ) [8, 9]. Неизвестными в таком подходе являются коэффициенты разложения по базису осцилляторных функций, которые находятся из проектированного уравнения Шредингера. Чис-

ленная реализация АВМРГ значительно проще численной реализации МРГ и содержит математические операции, такие как поиск собственных значений и векторов эрмитовой матрицы, основанные на надежных численных методах. Кроме того, преимущество многочастичных осцилляторных функций перед функциями МРГ состоит в том, что они в большей степени поддаются анализу и классификации, например, их интегралы перекрытия вычисляются аналитически, при работе с ними удается достаточно просто отделить движение общего центра масс и т.д. В целом, осцилляторные функции играют особую роль для современной физики и характеризуются многочисленными физическими приложениями [10–13].

Идеологически близким к АВМРГ является метод J -матрицы, используемый в исследованиях ядерных, атомных и молекулярных систем (см. сборник статей [14] и цитированную в нем литературу).

Многочисленные расчеты различных величин для ядерных систем подтверждают высокую эффективность АВМРГ [8, 9, 15–34]. Первоначально АВМРГ применялась для исследований ядерной структуры и ядерных процессов, возникающих в результате бинарных кластерных столкновений [8, 9, 15–26]. АВМРГ позволила объединить динамику кластерных и коллективных степеней свободы и описать распады гигантских резонансов в легких ядрах [17, 27]. Относительно недавно в рамках АВМРГ стали активно рассматриваться трехкластерные конфигурации [28–34], которые существенны в ряде реакций, представляющих определенный интерес для ядерной астрофизики.

Особое место в ядерной астрофизике занимают реакции радиационного захвата в столкновениях легких ядер [35–42]. Астрофизические S -факторы этих реакций при низких астрофизических энергиях, а также полученные на их основе скорости реакций необходимы для изучения кинетики процессов внутри звезд, в том числе Солнца, звездного и первичного нуклеосинтеза, а также для верификации моделей нуклеосинтеза, эволюции звезд и развития Вселенной. Примерами реакций радиационного захвата, экспериментальный и теоретический интерес к которым возник достаточно давно и не угасает по сей день, являются зеркальные реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$.

Первые экспериментальные измерения сечений этих реакций были выполнены еще в 1959 г. [43] при энергиях относительного движения сталкивающихся ядер в системе центра масс $E_{ц.м.} = 205 \div 565$ кэВ. Полученные экспериментальные значения сечений оказались во много раз больше их более ранней теоретической оценки, основанной на работе [44], в которой не учитывался прямой механизм реакций. Это привело к осознанию огромной роли реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ в горении солнечного водорода, поскольку означало, что при температуре солнечного коры вторая и третья цепочки протон-протонного цикла (pp-цикла) горения водорода [41], стартовой точкой которых служит реакция ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, могут вполне составить конкуренцию первой цепочке (см. рисунок 1).

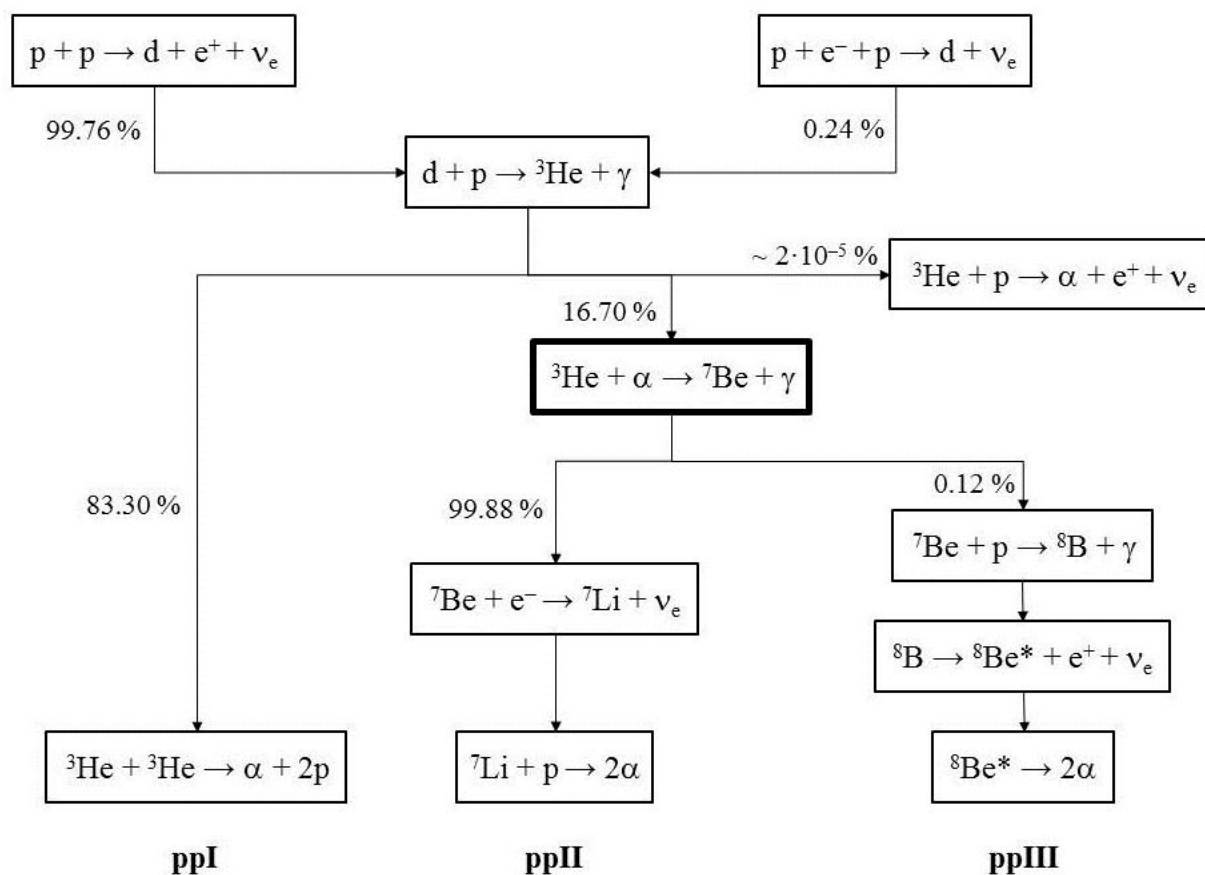


Рисунок 1. Схема pp-цикла горения водорода.

В ходе второй цепочки реакций pp-цикла в результате электронного захвата ядром ${}^7\text{Be}$ и в ходе третьей цепочки в результате β^+ -распада ядра ${}^8\text{B}$ создаются потоки солнечных нейтрино, которые в настоящий момент достаточно точно изме-

рены [45–47]. Эти данные в совокупности с достоверными сечениями реакций рр-цикла, среди которых важное место занимает именно реакция ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, можно использовать для исследования кинетики солнечного кора и проверки солнечных моделей [48].

Надежные значения сечения реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ требуются не только в задачах звездной эволюции, но и для решения проблем первичного нуклеосинтеза [49] (см. рисунок 2). Одной из таких проблем является так называемая проблема ${}^7\text{Li}$, заключающаяся в том, что модельный расчет распространенности ${}^7\text{Li}$ превышает по величине в несколько раз ее наблюдаемое значение. При этом одним из важных источников ${}^7\text{Li}$ является электронный захват ядром ${}^7\text{Be}$, образующимся в результате рассматриваемой реакции. Другим важным источником ${}^7\text{Li}$ служит непосредственно реакция ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$. Отсюда очевидна необходимость высокоточных значений сечений этих реакций для решения проблемы ${}^7\text{Li}$.

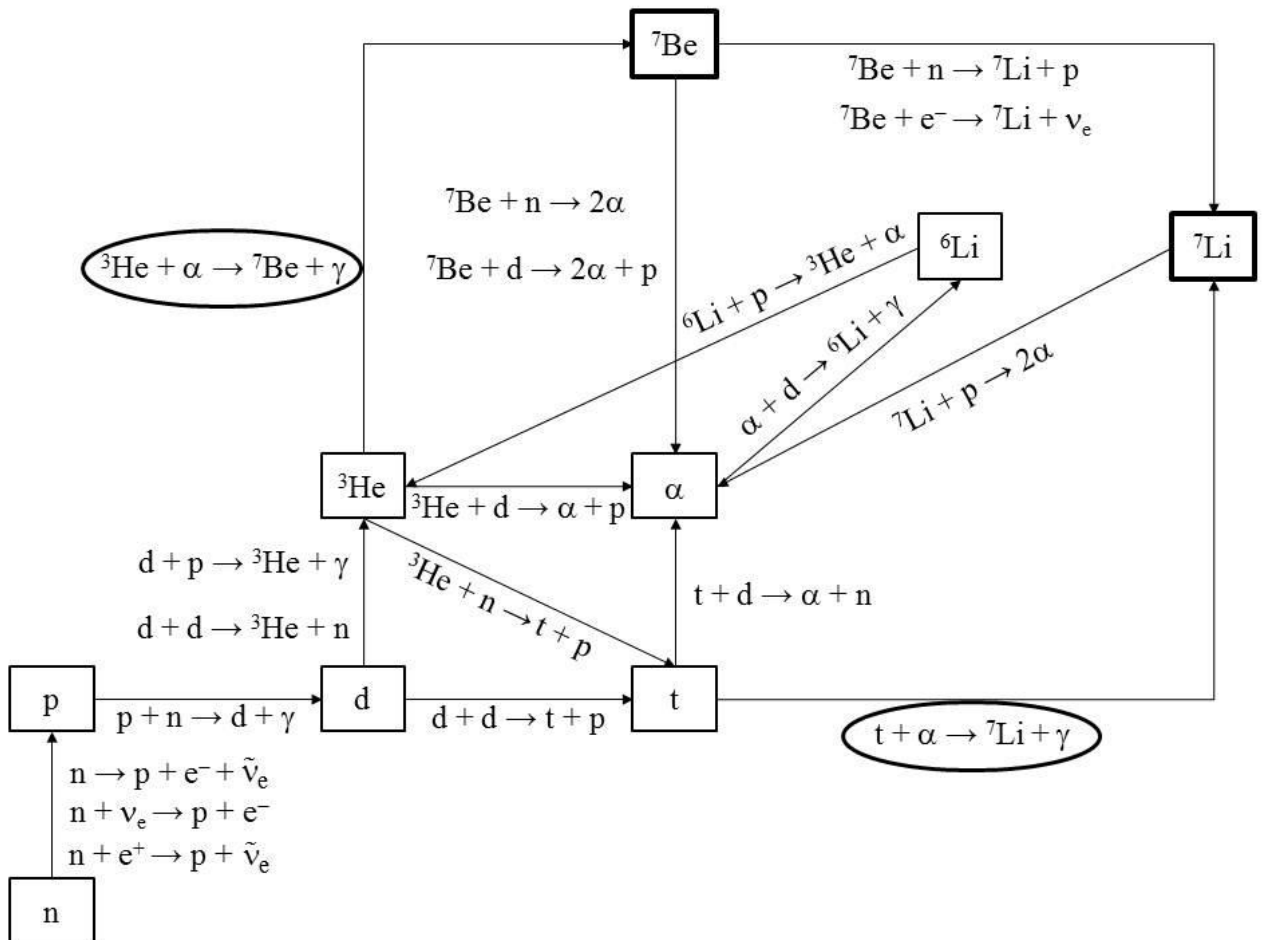


Рисунок 2. Основные реакции первичного нуклеосинтеза.

Вслед за первым экспериментальным исследованием реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ [43] последовал еще ряд экспериментальных работ. В 1961 г. были опубликованы экспериментальные данные по S -фактору при $E_{\text{ц.м.}} = 150\div 785$ кэВ [50], причем значения S -фактора оказались в несколько раз больше чем в [43] почти во всем энергетическом интервале. В 1987 г. появились еще две экспериментальные работы по измерению S -фактора [51, 52] при энергиях $E_{\text{ц.м.}} = 300\div 858$ кэВ и $79\div 464$ кэВ соответственно. Результаты [51], в целом, согласуются с [50]. При этом данные [52] проявляют ярко выраженную энергетическую зависимость при энергиях ниже 300 кэВ по сравнению с данными [50]. В отличие от предыдущих экспериментов, в которых были выполнены прямые измерения S -фактора, в работе [53] были произведены косвенные измерения S -фактора в диапазоне энергий $80\div 980$ кэВ с использованием данных по кулоновскому развалу ${}^7\text{Li}$. Измеренная энергетическая зависимость согласуется с результатами [52], но имеет большие погрешности в низкоэнергетической области. В работе [54] приведены экспериментальные данные по S -фактору в интервале энергий $50\div 1200$ кэВ. Характерными чертами этой работы являются достаточно широкий диапазон охваченных энергий и относительно малые погрешности измерений. Результаты работы [54] согласуются с предыдущими прямыми измерениями в области $E_{\text{ц.м.}} > 150$ кэВ при учете систематических ошибок. Однако, при $E_{\text{ц.м.}} < 150$ кэВ сравнение с единственным прямым экспериментом [52], охватывающим данную область энергий, демонстрирует значительное занижение результатов [54] по сравнению с [52]. Кроме того, данные [54] при $E_{\text{ц.м.}} > 250$ кэВ согласуются с косвенным экспериментом [53], но оказываются существенно ниже при более низких энергиях. В 2001 г. появилась еще одна работа по косвенным измерениям S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ при $E_{\text{ц.м.}} = 100\div 500$ кэВ [55] так же, как и работа [53], основанная на кулоновском развале ${}^7\text{Li}$. Данные этой работы так же, как и данные [53], в целом согласуются с [54] при $E_{\text{ц.м.}} > 250$ кэВ, но значительно отличаются от [54] при меньших энергиях. Таким образом, ни один из описанных выше экспериментов не охватывает область энергий $E_{\text{ц.м.}} \leq 50$ кэВ. Поэтому наиболее надежным и обоснованным способом нахождения S -фактора в этой области остается экстраполяция эксперимен-

тальных данных при более высоких энергиях с использованием микроскопических теоретических моделей. На рисунке 3 приведены данные измерений [43, 50–55] S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$.

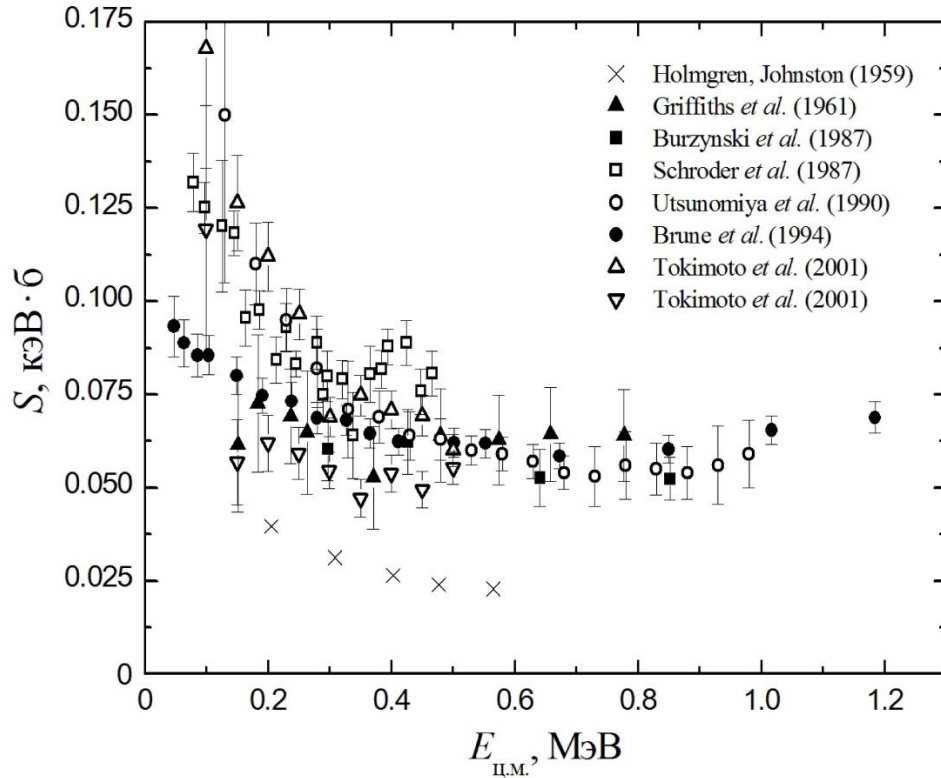


Рисунок 3. Экспериментальные данные по S -фактору реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$.

После проведения экспериментальных исследований [43] еще больший, по сравнению с реакцией ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, экспериментальный интерес был проявлен к реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. В работах [56–59], как и в [43], детектированием мгновенного γ -излучения (измерения в пучке), испускаемого в результате прямого радиационного захвата двух сталкивающихся изотопов гелия, были получены значения сечения (астрофизического S -фактора) при энергиях $E_{\text{ц.м.}} = 180\div 2486$ кэВ, $164\div 245$ кэВ, $107\div 1266$ кэВ, 525 кэВ соответственно. В работах [60, 61] для определения сечения применялись активационные измерения ${}^7\text{Be}$. Основная идея данного типа измерений заключается в том, что образующееся в результате синтеза изотопов гелия ядро ${}^7\text{Be}$ претерпевает электронный захват, который приводит к образованию ${}^7\text{Li}$ в основном и первом возбужденном состояниях (см. рисунок 3.1), при этом регистрация γ -излучения, испускаемого при переходе ${}^7\text{Li}$ из первого возбуж-

денного состояния в основное, может быть использована для определения полного сечения исходного радиационного захвата. Недостатком этого метода является то, что он дает только полное сечение процесса, но не позволяет извлечь информацию о коэффициенте ветвления между захватом в основное и первое возбужденное состояния ${}^7\text{Be}$. В работах [62, 63] наряду с измерениями в пучке, выполненными в интервалах энергии $165\div 1169$ кэВ, $195\div 686$ кэВ соответственно, были также произведены активационные измерения соответственно в интервалах энергии $947\div 1255$ кэВ, $664\div 686$ кэВ. Энергетическая зависимость астрофизических S -факторов, полученных во всех этих “старых” экспериментальных работах, выполненных еще в прошлом веке, показана на рисунке 4(а).

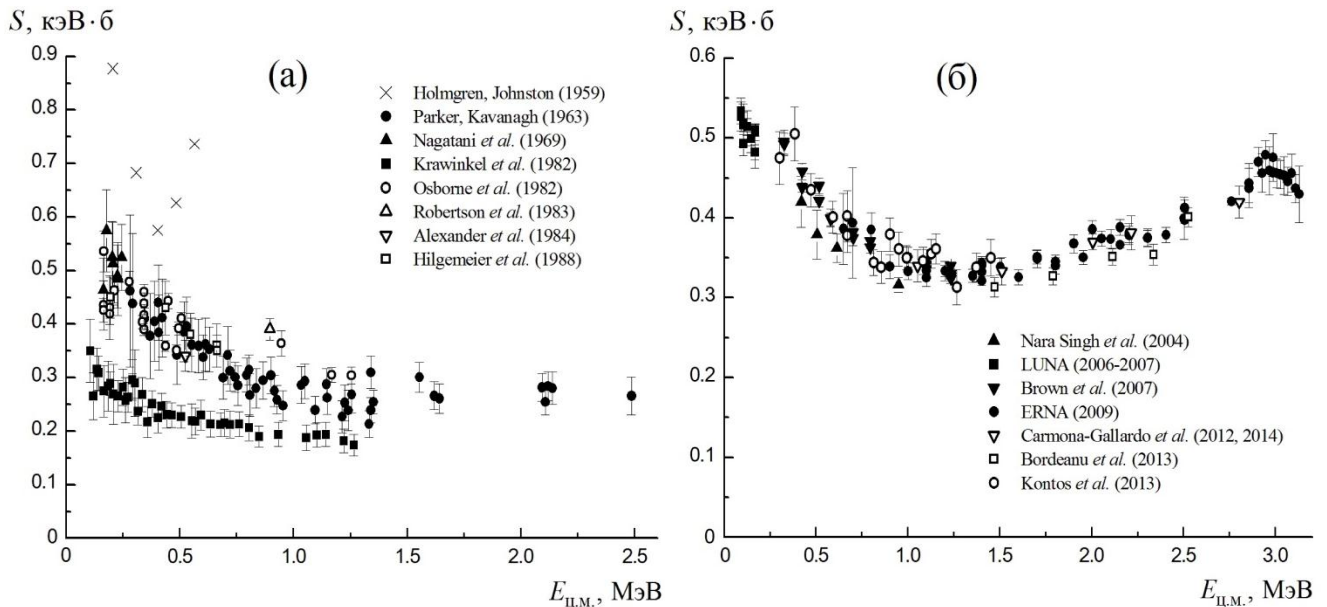


Рисунок 4. Экспериментальные данные по S -фактору реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$: (а) – “старые” данные (1959–1988 гг.), (б) – “новые” данные (2004–2014 гг.).

Как видно из рисунка 4(а), ни один из указанных экспериментов не охватывает важный для ядерной астрофизики так называемый энергетический интервал Гамова, который при температуре солнечного коры лежит приблизительно между 15 и 30 кэВ. Кроме того, достаточное количество экспериментальных точек в области средних энергий (> 1 МэВ) имеется лишь в работе [56], в то время как остальные данные сконцентрированы в основном в области меньших энергий. Наконец, между приведенными экспериментальными данными существует определенный

разброс и все они имеют относительно большие погрешности, что не удивительно, поскольку экспериментальные измерения сечений реакций с заряженными частицами при низких энергиях являются сложными и весьма ненадежными из-за малости сечений, обусловленной кулоновским барьером.

По этим причинам до настоящего времени не угасает интерес к исследованию реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. За последние десять лет, начиная с 2004 г., была выполнена еще целая серия “новых” экспериментов. В работах [64–66] активационными измерениями были получены значения сечения данной реакции при энергиях 420÷950 кэВ, 1.054÷2.804 МэВ, 1.473÷2.527 МэВ соответственно, в [67] измерениями в пучке покрыт интервал энергии 303÷1452 кэВ, в [68] обоими перечисленными способами измерено сечение при энергиях 327÷1235 кэВ, а в [69] измерениями отдачи ядер ${}^7\text{Be}$ (измерения отдачи) получено сечение в диапазоне энергий 1.5÷2.8 МэВ. Определение сечений посредством измерений отдачи основано на прямом счете ядер отдачи ${}^7\text{Be}$, образующихся в результате радиационного слияния двух изотопов гелия. Среди современных экспериментальных работ следует особо отметить эксперименты коллабораций LUNA [70–73] и ERNA [74]. Коллаборацией LUNA как измерениями в пучке, так и измерениями активации охвачен диапазон энергии 92÷171 кэВ, наиболее близкий на данный момент к астрофизически важным энергиям. Коллаборация ERNA, помимо этих двух типов измерений соответственно в интервалах энергии 1102÷2507 кэВ и 650÷2504 кэВ, впервые реализовала измерения ядер отдачи ${}^7\text{Be}$. В рамках данной методики были получены значения сечения реакции при энергиях 701÷3130 кэВ, что существенно расширило энергетическую область доступных данных и даже позволило охватить область резонанса. Современные данные по S -фактору, полученные во всех “новых” экспериментальных работах, выполненных, начиная с 2004 г., приведены на рисунке 4(б). Из рисунка 4(б) видно, что в отличие от “старых” экспериментальных данных (см. рисунок 4(а)) между “новыми” данными отсутствует явное расхождение и их неточности относительно малы. Также очевидна тенденция “новых” экспериментов к расширению энергетической границы доступных данных по S -фактору в сторону более высоких энергий. Однако, область астрофизи-

чески важных энергий по-прежнему остается недоисследованной из-за экспериментальных сложностей. В этих условиях, так же как и для реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, особую значимость приобретают микроскопические ядерные модели, позволяющих рассчитывать астрофизический S -фактор в труднодоступной для эксперимента области энергий.

Начиная с 1961 г. и по настоящее время был выполнен целый ряд теоретических расчетов сечений и астрофизических S -факторов реакций ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ [75–110]. Первые расчеты сечений и S -факторов этих реакций были основаны на модели прямого захвата [75–77], в которой учитывается только асимптотическая форма волновых функций дискретного и непрерывного спектров, а поведение на малых расстояниях не рассматривается. Более поздние расчеты на основе данной модели сделаны в [78–82]. В работах [83–87] произведены расчеты S -факторов рассматриваемых реакций в рамках потенциальной кластерной модели, а в [88, 89] и [90, 91] – в рамках ее модифицированного и расширенных вариантов соответственно. В потенциальной кластерной модели ядерная система разбивается на два точечных кластера, взаимодействующих через эффективный кластер-кластерный потенциал, подбираемый таким образом, чтобы обеспечить приемлемое описание свойств связанных состояний и фаз рассеяния. Расчеты [75–91] – не микроскопические, поскольку в них не учитывается внутренняя структура ядер (кластеров). В [92] произведен полумикроскопический расчет на основе микроскопической потенциальной кластерной модели, сочетающей в себе МРГ и потенциальную кластерную модель. Микроскопические расчеты сечений и S -факторов реакций ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, базирующиеся на МРГ и различных его реализациях с разными потенциалами и внутренними волновыми функциями кластеров, выполнены в [93–103]. В этих расчетах используются феноменологические нуклон-нуклонные потенциалы, которые подбираются так, чтобы воспроизводить некоторые наиболее важные для конкретной задачи свойства связанных состояний и состояний рассеяния. Большинство расчетов выполнены в одноканальном приближении, однако имелись попытки выхода за его пределы [97, 102, 103]. При этом снова требуется модификация феноменологического по-

тенциала. Наряду с указанными традиционными подходами к рассмотрению реакций ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, определенные усилия были направлены также и на объединение этих подходов с так называемыми *ab initio* подходами [104, 105], использующими реалистические нуклон-нуклонные потенциалы взаимодействия, которые воспроизводят данные по нуклон-нуклонному рассеянию и свойства дейтрона. В таких смешанных подходах нахождение волновых функций дискретного спектра, основанное на использовании либо вариационного метода Монте–Карло [106, 107], либо оболочечной модели без кора [108, 109], комбинируется с традиционными потенциальными кластерными моделями для волновых функций непрерывного спектра. Однако, эти комбинированные подходы не позволили одновременно успешно описать нормировку и энергетическую зависимость экспериментальных данных по S -факторам рассматриваемых реакций. В 2011 г. был выполнен первый *ab initio* расчет S -факторов реакций ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ [110] с использованием фермионной молекулярной динамики [111] и реалистического эффективного потенциала [112] для нахождения волновых функций дискретного и непрерывного спектров. Полученный в [110] S -фактор реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ согласуется с современными экспериментальными данными, но S -фактор реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ оказался несколько завышенным по отношению к наиболее полным и точным экспериментальным данным [54].

Сравнение результатов теоретических расчетов S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ показывает явное расхождение между ними (см. рисунки 3.8 и 3.9). Аналогичная ситуация имеет место и для зеркальной реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ (см. рисунки 4.8 и 4.9). Результаты экспериментальных исследований, проведенных в разные годы, также достаточно далеки от согласия между собой. Кроме того, с момента появления в 2004 г. первых современных экспериментальных данных по S -фактору реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ [64] единственный микроскопический расчет S -факторов рассматриваемых реакций выполнен только в статье [110], в которой достигнуто согласие с имеющимися на тот момент современными данными по реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, но получено расхождение с наиболее достоверными данными

[54] по реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$. После этого расчета появились еще несколько наборов экспериментальных данных по S -фактору реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ [65–67, 69]. Данные [65, 66, 69], покрывающие область средних энергий (> 1 МэВ), в совокупности с данными [74] оказались в расхождении с единственными “старыми” экспериментальными данными [56], покрывающими эту область энергий. В целом, данные [56] проявляют более резкую энергетическую зависимость по сравнению с современными данными (см. рисунок 5). При этом большинство теоретических расчетов S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, выполненных до появления современных экспериментальных данных, были нацелены именно на описание эксперимента [56]. Таким образом, область средних энергий также оказалась проблематичной, наряду с областью астрофизически важных (низких) энергий, для которой в принципе отсутствуют экспериментальные данные. В итоге, совокупность представленных выше проблем демонстрирует острую актуальность экспериментальных и микроскопических теоретических исследований реакций радиационного захвата ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$.

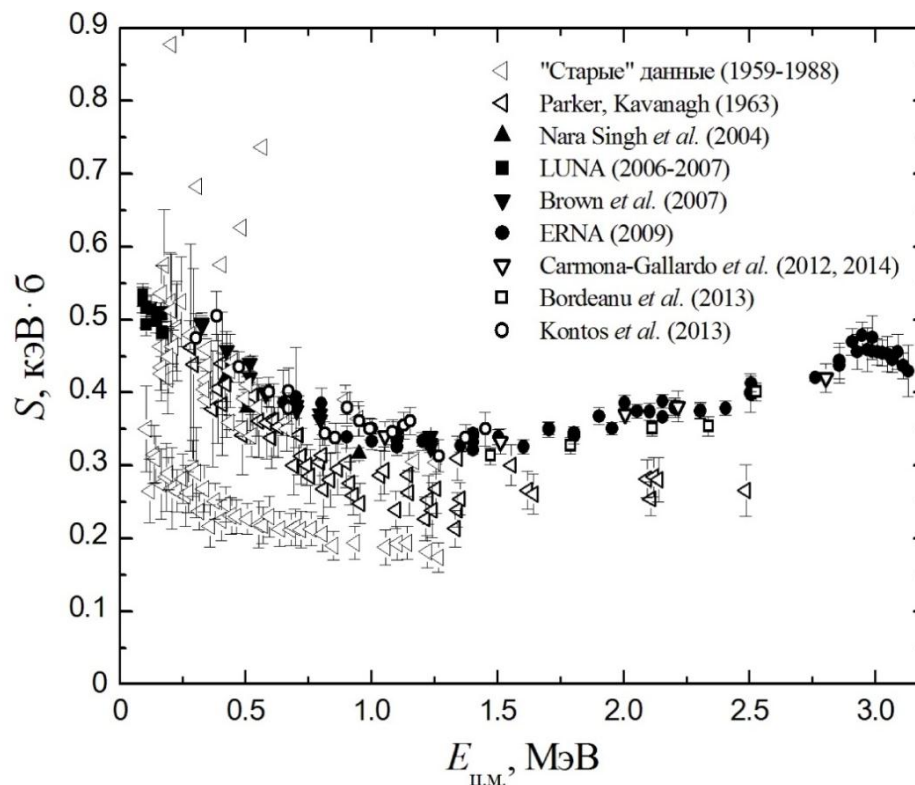


Рисунок 5. Сравнение “старых” и современных экспериментальных данных по S -фактору реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$.

Целью диссертации является построение основанного на АВМРГ микроскопического подхода к описанию радиационного захвата в системе легких ядер, рассмотрение в рамках данного подхода зеркальных реакций ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ и вычисление их астрофизических S -факторов и коэффициентов ветвления в области низких и средних энергий. Следует отметить, что до настоящего момента единственной работой, в которой эти реакции рассматривались с использованием АВМРГ, является статья [101]. Однако, в [101] S -факторы вычислены при одном нулевом значении энергии без рассмотрения их энергетической зависимости.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Общий объем диссертации составляет 130 страниц, включая 23 рисунка, 5 таблиц и список литературы из 161 наименования.

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируется цель диссертационного исследования, дается обзор мировой научной литературы по теме исследования, приводятся краткое описание содержания диссертации и сведения об апробации ее результатов.

В **первой главе** подробно изложен математический формализм одноканального варианта АВМРГ, рассмотрены вопросы, касающиеся проведения вычислений для двухкластерных систем, и детали численных расчетов.

Представлены базисные волновые функции АВМРГ и системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения полных волновых функций дискретного и непрерывного спектров ядерной системы по этим базисным функциям. Коэффициентами перед неизвестными в системах уравнений АВМРГ выступают матричные элементы гамильтониана на базисных волновых функциях АВМРГ.

В качестве ядерного нуклон-нуклонного потенциала выбран модифицированный потенциал Хазегавы–Нагаты, содержащий центральные обменные, спин-орбитальные и тензорные силы, координатная зависимость которого имеет вид суперпозиции гауссоид. Этот потенциал воспроизводит отталкивание на малых расстояниях и притяжение на больших. Кроме того, с ним удастся достичь хорошего описания данных по рассеянию легких ядер в широком диапазоне энергий,

электромагнитные свойства легких ядер и электромагнитные процессы с их участием.

Приведена методика, сводящая вычисления матричных элементов на волновых функциях трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек к более простым вычислениям с волновыми функциями обычной осцилляторной модели оболочек.

Подробно сформулирована техника производящих функций, позволяющая изящно и относительно просто вычислять матричные элементы операторов на полностью антисимметризованных базисных волновых функциях АВМРГ. Исходным положением этой техники является соотношение между волновыми функциями трехмерного гармонического осциллятора и производящей для них функцией. С использованием этого соотношения для базисных функций АВМРГ вводится производящая функция многонуклонной системы, после чего строятся матричные элементы на производящих функциях, по которым находятся все необходимые матричные элементы на базисных волновых функциях АВМРГ.

Детально рассмотрены вопросы вычисления производящих матричных элементов операторов, представимых в виде суммы одно- и двухчастичных операторов.

Отмечены общие свойства матричных элементов оператора кинетической энергии и операторов центрального и нецентрального (спин-орбитального, тензорного) взаимодействий в базисе АВМРГ.

Изложена техника рекуррентных соотношений, удобная и эффективная для реализации численных расчетов матричных элементов на базисных функциях АВМРГ.

Вторая глава посвящена общему рассмотрению радиационного захвата в столкновениях ядер.

Представлена и проанализирована общая формула для вероятности перехода ядра между связанными состояниями в длинноволновом приближении, приведены общие выражения для электромагнитных мультипольных операторов.

Наиболее важные электрические дипольный и квадрупольный операторы пре-

образованы к сумме двухчастичных трансляционно-инвариантных операторов, а магнитный дипольный оператор – к сумме одно- и двухчастичных операторов, что создает значительные удобства при вычислении их матричных элементов на базисных волновых функциях АВМРГ.

Получено выражение для сечения радиационного захвата, которое в длинно-волновом приближении выражается через приведенные матричные элементы электромагнитных мультипольных операторов.

В **третьей главе** проведено теоретическое исследование реакции радиационного захвата ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ в рамках АВМРГ.

Рассмотрены общие свойства реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ при низких и средних энергиях, получена формула для парциальных сечений данной реакции в рамках АВМРГ.

Приведены внутренние волновые функции кластеров ${}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}$, для системы ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ вычислены интеграл перекрытия производящих функций, производящие матричные элементы гамильтониана и наиболее важных электромагнитных мультипольных операторов: электрических дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного операторов. С использованием производящих матричных элементов найдены явные выражения для матричных элементов рассматриваемых электромагнитных мультипольных операторов на базисных волновых функциях АВМРГ.

Рассчитаны астрофизические S -факторы реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ с образованием ${}^7\text{Be}$ в основном и первом возбужденном состояниях, а также ее суммарный S -фактор и коэффициент ветвления.

В представленной модели имеется два параметра, допускающих небольшую вариацию: осцилляторный радиус, входящий в осцилляторные функции, и интенсивность майорановского центрального взаимодействия, входящая в модифицированный потенциал Хазегавы–Нагаты. Значения этих параметров были выбраны таким образом, чтобы достичь одновременно хорошего описания современных экспериментальных данных по полному S -фактору реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и данных по фазам упругого рассеяния в системе ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$. При этом было получено доста-

точно хорошее описание современных данных и для коэффициента ветвления, S -факторов реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ с образованием ${}^7\text{Be}$ в основном и первом возбужденном состояниях. Кроме того, расчетные значения энергий основных состояний изотопов гелия, основного и первого возбужденного состояний ядра ${}^7\text{Be}$, порога развала ${}^7\text{Be}$ на два кластера ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ и разности последнего и энергии возбуждения первого возбужденного состояния ${}^7\text{Be}$ также оказались вполне разумными.

Рассмотрены также другие критерии выбора значений параметров модели, ни один из которых не позволил одновременно хорошо описать данные по фазам упругого рассеяния ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ и S -фактору реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. В этом смысле указанный выше выбор значений параметров оказался оптимальным.

Исследование чувствительности результатов расчетов к вариации параметров модели показало, что астрофизический S -фактор реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ более чувствителен к изменению этих параметров по сравнению с коэффициентом ветвления.

Сравнение расчетов астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, выполненных в рамках различных микроскопических и полумикроскопических подходов, друг с другом и с экспериментальными данными показывает, что наш расчет в рамках АВМРГ дает наилучшее описание всей совокупности современных и наиболее точных экспериментальных данных.

В **четвертой главе** проведено теоретическое исследование реакции радиационного захвата ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ на основе АВМРГ.

Обсуждаются общие свойства реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, делается сопоставление с зеркальной реакцией ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$.

Вследствие изотопической инвариантности матричные элементы гамильтониана для зеркальных систем ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ отличаются только величинами вклада от кулоновского потенциала. Вычисленные для системы ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ матричные элементы электрических дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного операторов имеют схожую с соответствующими матричными элементами для системы ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ зависимость от квантовых чисел, но отличаются значениями некоторых коэффициентов.

Вычислены астрофизические S -факторы реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ с образованием ${}^7\text{Li}$ в основном и первом возбужденном состояниях, суммарный астрофизический S -фактор и коэффициент ветвления данной реакции.

Расчет со значениями параметров, оптимальными для зеркальной реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, позволяет достаточно хорошо описать данные по фазам упругого рассеяния в системе ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ и дает вполне разумные значения энергий основных состояний ядер ${}^4\text{He}$ и ${}^3\text{H}$, основного и первого возбужденного состояний ядра ${}^7\text{Li}$, порога развала ${}^7\text{Li}$ на два кластера ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$, а также разности последнего и энергии возбуждения первого возбужденного состояния ${}^7\text{Li}$. Качественно энергетическое поведение расчетной кривой для полного астрофизического S -фактора согласуется с наиболее точными и покрывающими наиболее широкий диапазон энергий экспериментальными данными. Однако, количественно теоретическая кривая лежит немного выше.

Возникшую трудность можно устранить небольшим варьированием значений параметров. В результате удастся по-прежнему достаточно разумно описывать данные по фазам упругого рассеяния ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$, но при этом улучшается описание перечисленных выше энергий и достигается очень хорошее согласие расчетных S -факторов реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ с образованием ${}^7\text{Li}$ в основном и первом возбужденном состояниях, а также суммарного астрофизического S -фактора с наиболее точными экспериментальными данными.

Коэффициент ветвления реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ демонстрирует хорошее согласие с экспериментальными данными для обоих наборов значений параметров.

Наряду с этими наборами значений параметров модели, рассмотрены некоторые другие варианты выбора значений параметров. Расчеты с использованием этих значений не дают одновременно хорошего описания фаз упругого рассеяния ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ и S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$.

Астрофизический S -фактор реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ более чувствителен к изменению параметров модели, чем коэффициент ветвления. Аналогичная ситуация имеет место и для зеркальной реакции.

Так же, как и в случае зеркальной реакции, наш расчет астрофизического S -

фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, выполненный в рамках АВМРГ, наилучшим образом согласуется с наиболее точными и покрывающими наиболее широкий диапазон энергий экспериментальными данными по сравнению с другими микроскопическими и полумикроскопическими расчетами.

В **заключении** кратко сформулированы основные научные результаты диссертации, указана ее научная и практическая значимость.

По теме диссертационной работы опубликованы девять печатных работ [113–121], три из которых – в научных журналах [113–115], входящих в перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах Центра фундаментальных и прикладных исследований Всероссийского научно-исследовательского института автоматики имени Н.Л. Духова и Воронежского государственного университета, а также были представлены на следующих конференциях:

- VII Научно-техническая конференция молодых ученых “ВНИИА-2013” (Москва, Россия, 11–29 марта 2013 г.);
- VIII Научно-техническая конференция молодых ученых “ВНИИА-2014” (Москва, Россия, 7–25 апреля 2014 г.);
- VI International Conference “Fusion 2014” (New Delhi, India, February 24–28, 2014);
- 3rd International Workshop on “State of the Art in Nuclear Cluster Physics” (Yokohama, Japan, May 26–30, 2014);
- LXIII International Conference “Nucleus 2013” (Moscow, Russia, October 8–12, 2013);
- LXIV International Conference “Nucleus 2014” (Minsk, Belarus, July 1–4, 2014).

Глава 1. Формализм алгебраической версии метода резонирующих групп (АВМРГ)

1.1. Базисные волновые функции и система уравнений АВМРГ

В одноканальном двухкластерном варианте МРГ трансляционно-инвариантная волновая функция системы A нуклонов ищется в виде [6, 7]:

$$\Psi = NA \{ \phi_{\text{тр.инв.}}^{(1)} \phi_{\text{тр.инв.}}^{(2)} f(\mathbf{q}) \}, \quad (1.1)$$

где N – нормировочная постоянная, A – оператор антисимметризации по перестановкам всех пар нуклонов, $\phi_{\text{тр.инв.}}^{(1)}$, $\phi_{\text{тр.инв.}}^{(2)}$ – внутренние трансляционно-инвариантные волновые функции кластеров 1 и 2 с массовыми и зарядовыми числами A_1, Z_1 и A_2, Z_2 соответственно, $f(\mathbf{q})$ – волновая функция относительного движения кластеров, которая зависит от вектора Якоби

$$\mathbf{q} = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}} (\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}^{(1)} - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}^{(2)}), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}^{(i)} = \frac{1}{A_i} \sum_{n=1}^{A_i} \mathbf{r}_{i,n}, \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Из (1.2) видно, что абсолютная величина вектора Якоби пропорциональна расстоянию между центрами масс кластеров 1 и 2. В (1.3) суммирование предполагается по всем нуклонам i -го кластера, $\mathbf{r}_{i,n}$ – радиус-вектор n -го нуклона в i -ом кластере. Внутренние волновые функции кластеров обычно считаются фиксированными и

выбираются в виде волновых функций нижайших, допустимых принципом Паули, состояний трансляционно-инвариантной модели оболочек [12]. Отметим, что основные трудности при вычислениях в рамках МРГ создает присутствие оператора антисимметризации A в функции (1.1).

Волновую функцию (1.1) можно разложить в ряд

$$\Psi = \sum_{J=J_0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \sum_{l=|J-s|}^{J+s} N_{J^{\pi}ls} A \left\{ \varphi_{\text{тр.инв.}}^{(1)} \varphi_{\text{тр.инв.}}^{(2)} f_{J^{\pi}Mls}(q) Y_{JM}^{ls}(\theta, \varphi) \right\} \quad (1.4)$$

по спин-угловым функциям [122]

$$Y_{JM}^{ls}(\theta, \varphi) = \sum_{m+\sigma=M} C_{lm\sigma}^{JM} Y_{lm}(\theta, \varphi) \left[\chi_{s_1} \chi_{s_2} \right]_{\sigma}^s, \quad (1.5)$$

где J, l, s, M, m, σ – полный угловой момент (полный момент количества движения), относительный орбитальный момент (орбитальный момент относительного движения), канальный спин и их проекции соответственно, $C_{lm\sigma}^{JM}$ – коэффициент Клебша–Гордана [122, 123], θ, φ – полярный и азимутальный сферические углы, задающие ориентацию вектора Якоби \mathbf{q} , $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – сферическая функция (гармоника) [122, 123], $\varphi_{\text{тр.инв.}}^{(i)}$, $\chi_{s_i\sigma_i}$ – радиально-изоспиновая и спиновая волновые функции i -го кластера со спином s_i и его проекцией σ_i , $f_{J^{\pi}Mls}(q)$ – радиальная волновая функция относительного движения кластеров. Сферические функции определяются выражением [122, 123]:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad m \geq 0, \quad (1.6)$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi), \quad m \geq 0.$$

Присоединенные полиномы Лежандра $P_l^m(\cos\theta)$ [124–126], в свою очередь, связаны с обычными полиномами Лежандра $P_l(\cos\theta)$ [124–128] соотношением [125, 126, 129]

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{(d \cos\theta)^m} = \frac{1}{2^l l!} \sin^m \theta \frac{d^{l+m}}{(d \cos\theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l. \quad (1.7)$$

В случае положительной четности состояния π в (1.4) проводится суммирование

только по четным значениям l , а в случае отрицательной четности – только по нечетным l . Разложение (1.4) позволяет получить интегро-дифференциальное уравнение относительно $f_{J^\pi M l s}(q)$, которое рассматривается в традиционной формулировке МРГ [6, 7]. Решение этого уравнения является весьма сложной вычислительной задачей, требующей громоздких численных расчетов.

Численного решения сложного интегро-дифференциального уравнения МРГ можно избежать с помощью АВМРГ [8, 9]. В основе АВМРГ лежит разложение волновой функции относительного движения кластеров в ряд [8, 9, 15–19]

$$f_{J^\pi M l s}(q) = \sum_{v=0}^{\infty} C_{J^\pi M l s v} f_{v l}(q) \quad (1.8)$$

по полному набору нормированных радиальных осцилляторных функций (радиальных волновых функций трехмерного гармонического осциллятора)

$$f_{v l}(q) = N_{v l} \bar{q}^l L_{(v-l)/2}^{(l+1/2)}(\bar{q}^2) \exp(-\bar{q}^2 / 2), \quad (1.9)$$

$$\bar{q} = q / r_0, \quad N_{v l} = (-1)^{(v-l)/2} \sqrt{\frac{2\Gamma((v-l+2)/2)}{r_0^3 \Gamma((v+l+3)/2)}},$$

где r_0 – осцилляторный радиус, v – полное число осцилляторных квантов, Γ – гамма-функция [124], $L_{(v-l)/2}^{l+1/2}$ – обобщенный полином Лагерра [124, 125, 128]. В результате волновая функция (1.4) записывается в виде разложения [8, 15–19]

$$\Psi = \sum_{J=J_0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \sum_{l=|J-s|}^{J+s} \sum_{v=v_0}^{\infty} C_{J^\pi M l s v} \Psi_{J^\pi M l s v}^{(\text{тр.инв.})} \quad (1.10)$$

по трансляционно-инвариантным функциям

$$\Psi_{J^\pi M l s v}^{(\text{тр.инв.})} = N_{J^\pi M l s v} \mathbf{A} \left\{ \varphi_{\text{тр.инв.}}^{(1)} \varphi_{\text{тр.инв.}}^{(2)} f_{v l}(q) Y_{JM}^{l s}(\theta, \varphi) \right\} \quad (1.11)$$

и задача нахождения функции относительного движения $f_{J^\pi M l s}(q)$ сводится к задаче нахождения неизвестных коэффициентов разложения $C_{J^\pi M l s v}$. В разложении (1.10) v_0 – минимальное, допустимое принципом Паули, число осцилляторных квантов.

Исходную волновую функцию (1.1) можно также представить в виде разложения

$$\Psi = \sum_{s,\sigma} \sum_{l,m} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} C_{lms\sigma\nu} \Psi_{lms\sigma\nu}^{(\text{тр.инв.})} \quad (1.12)$$

по трансляционно-инвариантным функциям

$$\Psi_{lms\sigma\nu}^{(\text{тр.инв.})} = N_{lsv} A \left\{ \phi_{\text{тр.инв.},s\sigma}^{(1+2)} f_{\nu lm}(\mathbf{q}) \right\}, \quad (1.13)$$

$$f_{\nu lm}(\mathbf{q}) = f_{\nu l}(q) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (1.14)$$

$$\phi_{\text{тр.инв.},s\sigma}^{(1+2)} = \left[\phi_{\text{тр.инв.},s_1}^{(1)} \phi_{\text{тр.инв.},s_2}^{(2)} \right]_{\sigma}^s, \quad \phi_{\text{тр.инв.},s_i\sigma_i}^{(i)} = \varphi_{\text{тр.инв.}}^{(i)} \chi_{s_i\sigma_i}, \quad i=1,2, \quad (1.15)$$

которые связаны с функциями (1.11) соотношением

$$\Psi_{J^{\pi} M l s \nu}^{(\text{тр.инв.})} = \sum_{m+\sigma=M} C_{lm s \sigma}^{JM} \Psi_{lms\sigma\nu}^{(\text{тр.инв.})}. \quad (1.16)$$

Функции (1.11) и (1.13) называются базисными волновыми функциями АВМРГ соответственно в $(JMls\nu)$ - и $(lms\sigma\nu)$ -представлениях.

Подставляя (1.10) в проектированное многочастичное уравнение Шредингера, получим для неизвестных коэффициентов разложения бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{s,l} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \left(\left\langle J^{\pi} M \tilde{l} \tilde{s} \tilde{\nu} | H | J^{\pi} M l s \nu \right\rangle - E \delta_{\tilde{s}s} \delta_{\tilde{l}l} \delta_{\tilde{\nu}\nu} \right) C_{J^{\pi} M l s \nu} = 0, \quad \tilde{\nu} = \nu_0, \nu_0 + 2, \dots, \quad (1.17)$$

в которой H и E – гамильтониан и полная энергия рассматриваемой ядерной системы соответственно.

Задача вычисления многочастичных матричных элементов в базисе функций АВМРГ (1.11) является наиболее трудоемкой вследствие антисимметризации. Не будет преувеличением заключить, что эта задача является центральной при реализации расчетов в АВМРГ.

1.2. Гамильтониан ядерной системы

Для ядерной системы, состоящей из A нуклонов, трансляционно-инвариантный гамильтониан внутреннего движения H имеет вид:

$$H = T - T_{\text{ц.м.}} + V_{\text{кул}} + V_{\text{я}}, \quad (1.18)$$

где

$$T - T_{\text{ц.м.}} = -\frac{\hbar^2}{2mA} \sum_{i>j=1}^A (\nabla_i - \nabla_j)^2 \quad (1.19)$$

– оператор кинетической энергии,

$$V_{\text{кул}} = \sum_{i>j=1}^A \frac{e^2}{r_{ij}} \left(\frac{1}{2} - t_{3,i} \right) \left(\frac{1}{2} - t_{3,j} \right) \quad (1.20)$$

– оператор кулоновского взаимодействия протонов, в которых e – элементарный заряд ($e > 0$), \hbar – постоянная Планка, m – масса нуклона. Для описания ядерного взаимодействия нуклонов будем использовать модифицированный потенциал Хазегавы–Нагаты [130–132]

$$V_{\text{я}} = V_{\text{ц}} + V_{\text{ls}} + V_{\text{т}}, \quad (1.21)$$

содержащий центральную обменную

$$V_{\text{ц}} = \sum_{i>j=1}^A \sum_{n=1}^3 V_{\text{ц},n} \left(w_{\text{ц},n} + (1 - g_{\text{ц}}) m_{\text{ц},n} - g_{\text{ц}} m_{\text{ц},n} P_{ij}^{\sigma} P_{ij}^{\tau} + b_{\text{ц},n} P_{ij}^{\sigma} - h_{\text{ц},n} P_{ij}^{\tau} \right) \exp(-\mu_{\text{ц},n} r_{ij}^2), \quad (1.22)$$

спин-орбитальную

$$V_{\text{ls}} = g_{\text{ls}} \sum_{i>j=1}^A \sum_{n=1}^2 V_{\text{ls},n} \left(w_{\text{ls},n} - h_{\text{ls},n} P_{ij}^{\tau} \right) [\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{p}_{ij}] (\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j) \exp(-\mu_{\text{ls},n} r_{ij}^2) \quad (1.23)$$

и тензорную

$$V_{\text{т}} = 4g_{\text{т}} \sum_{i>j=1}^A \sum_{n=1}^3 V_{\text{т},n} \left(w_{\text{т},n} - h_{\text{т},n} P_{ij}^{\tau} \right) \left(3(\mathbf{s}_i \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{s}_j \mathbf{r}_{ij}) - (\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j) \mathbf{r}_{ij}^2 \right) \exp(-\mu_{\text{т},n} r_{ij}^2) \quad (1.24)$$

компоненты, в которых \mathbf{r} и $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ – радиус-вектор и оператор импульса нуклона соответственно, ∇ – оператор набла, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ – радиус-вектор относительного движения i -го и j -го нуклонов, $\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ – относительный импульс i -го и j -го нуклонов, $\mathbf{s} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)/2$ ($\mathbf{t} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)/2$) – оператор спина (изоспина) нуклона, компонентами которого являются матрицы Паули, действующие на спиновую (изоспиновую) волновую функцию нуклона, P_{ij}^{σ} , P_{ij}^{τ} – операторы обмена проекцией спина σ и изоспина τ между i -ым и j -ым нуклонами. Остальные величины являются параметрами потенциала, значения которых приведены в таблице 1.1 за исключением значений варьируемых параметров $g_{\text{ц}}$, g_{ls} , $g_{\text{т}}$, имеющих смысл ин-

тенсивностей майорановских центральных обменных, спин-орбитальных и тензорных сил соответственно, введение которых в потенциал Хазегавы–Нагаты [130–132] обусловлено некоторой неопределенностью значений его параметров. Небольшое варьирование этих параметров в определенной мере позволяет компенсировать неточность модели. О величинах параметров $g_{\text{ц}}$, $g_{\text{лс}}$, $g_{\text{т}}$ речь пойдет в третьей и четвертой главах.

Таблица 1.1. *Параметры модифицированного потенциала Хазегавы–Нагаты.*

Параметр	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$w_{\text{ц},n}$	-0.2361	0.424	0.4474
$m_{\text{ц},n}$	1.1528	0.4057	0.3985
$b_{\text{ц},n}$	0.5972	0.1401	0.1015
$h_{\text{ц},n}$	-0.5139	0.0302	0.0526
$V_{\text{ц},n}$ (МэВ)	-6	-546	1655
$\mu_{\text{ц},n}$ (фм ⁻²)	0.16	1.127	3.4
$w_{\text{лс},n}$	0.5	0.5	–
$h_{\text{лс},n}$	-0.5	-0.5	–
$V_{\text{лс},n}$ (МэВ)	-1519	1918	–
$\mu_{\text{лс},n}$ (фм ⁻²)	3	5	–
$w_{\text{т},n}$	0.3277	0.4102	0.5
$h_{\text{т},n}$	0.6723	0.5898	0.5
$V_{\text{т},n}$ (МэВ)	-1696	-369.5	1688
$\mu_{\text{т},n}$ (фм ⁻²)	0.53	1.92	8.95

Координатная зависимость выбранного потенциала парного нуклон-нуклонного взаимодействия имеет вид суперпозиции гауссоид. Этот потенциал воспроизводит отталкивание на малых расстояниях и притяжение на больших. Кроме того, с ним удастся достичь хорошего описания данных по рассеянию легких ядер в широком диапазоне энергий [131, 132], электромагнитные свойства легких ядер [130, 133] и электромагнитные процессы с их участием [98].

Для дальнейших вычислений более удобно записать потенциалы (1.22)–(1.24) в следующем виде:

$$V_{\text{ц}} = \sum_{i>j=1}^A \sum_{n=1}^3 \left(\alpha_{\text{ц},n} + \beta_{\text{ц},n} P_{ij}^{\sigma} + \gamma_{\text{ц},n} P_{ij}^{\tau} + \delta_{\text{ц},n} P_{ij}^{\sigma} P_{ij}^{\tau} \right) \exp(-r_{ij}^2 / a_{\text{ц},n}), \quad (1.25)$$

$$V_{\text{лс}} = \sum_{i>j=1}^A \sum_{n=1}^2 \left(\alpha_{\text{лс},n} + \gamma_{\text{лс},n} P_{ij}^{\tau} \right) [\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{p}_{ij}] (\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j) \exp(-r_{ij}^2 / a_{\text{лс},n}), \quad (1.26)$$

$$V_{\text{т}} = 4 \sum_{i>j=1}^A \sum_{n=1}^3 \left(\alpha_{\text{т},n} + \gamma_{\text{т},n} P_{ij}^{\tau} \right) \left(3(\mathbf{s}_i \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{s}_j \mathbf{r}_{ij}) - (\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j) \mathbf{r}_{ij}^2 \right) \exp(-r_{ij}^2 / a_{\text{т},n}), \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{ц},n} &= V_{\text{ц},n} \left[w_{\text{ц},n} + (1 - g_{\text{ц}}) m_{\text{ц},n} \right], & \alpha_{\text{лс},n} &= g_{\text{лс}} V_{\text{лс},n} w_{\text{лс},n}, & \alpha_{\text{т},n} &= g_{\text{т}} V_{\text{т},n} w_{\text{т},n}, \\ \beta_{\text{ц},n} &= V_{\text{ц},n} b_{\text{ц},n}, \\ \gamma_{\text{ц},n} &= -V_{\text{ц},n} h_{\text{ц},n}, & \gamma_{\text{лс},n} &= -g_{\text{лс}} V_{\text{лс},n} h_{\text{лс},n}, & \gamma_{\text{т},n} &= -g_{\text{т}} V_{\text{т},n} h_{\text{т},n}, \\ \delta_{\text{ц},n} &= -g_{\text{ц}} V_{\text{ц},n} m_{\text{ц},n}, \\ \alpha_{\text{ц},n} &= 1 / \mu_{\text{ц},n}, & \alpha_{\text{лс},n} &= 1 / \mu_{\text{лс},n}, & \alpha_{\text{т},n} &= 1 / \mu_{\text{т},n}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Асимптотическое поведение матричных элементов гамильтониана в осцилляторном представлении [15, 134] позволяет свести бесконечную систему уравнений (1.17) к конечной. Основные особенности этого поведения заключаются в следующем: диагональные матричные элементы гамильтониана содержат слагаемые, которые не зависят от числа осцилляторных квантов ν и соответствуют внутренним энергиям кластеров; матричные элементы оператора кинетической энергии асимптотически линейно возрастают с увеличением ν ; матричные элементы потенциала $V_{\nu\mu} = (V_{\text{кул}} + V_{\text{я}})_{\nu\mu}$ быстро убывают при удалении от главной диагонали, в то время как вдоль и вблизи нее убывают медленно.

1.3. Система уравнений АВМРГ для дискретного спектра

При решении задачи на связанные состояния системы (дискретный спектр), когда ядерные кластеры при движении находятся на конечном расстоянии друг от друга, т.е. совершают финитное движение, в разложении искомой волновой функции (1.10) ограничиваются конечным числом слагаемых. Формально, это со-

ответствует тому, что все старшие коэффициенты разложения полагаются равными нулю. В результате из (1.17) получаем конечную систему линейных однородных алгебраических уравнений [15]:

$$\sum_{s,l} \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_{\max}} \left(\langle J^\pi M \tilde{s} \tilde{\nu} | H | J^\pi M l s \nu \rangle - E \delta_{ss} \delta_{ll} \delta_{\nu\nu} \right) C_{J^\pi M l s \nu}^{(\text{д})} = 0, \quad \tilde{\nu} = \nu_0, \nu_0 + 2, \dots, \nu_{\max}, \quad (1.29)$$

где ν_{\max} – достаточно большое число осцилляторных квантов, такое что в (1.17) всеми членами с $\nu > \nu_{\max}$ можно пренебречь. Полученная система (1.29) имеет решения при значениях полной энергии, равных собственным значениям укороченной ($\nu, \tilde{\nu} \leq \nu_{\max}$) матрицы гамильтониана. Связанным состояниям отвечают отрицательнозначные величины энергии относительного движения кластеров. При выборе величины ν_{\max} руководствуются следующими соображениями: дальнейшее увеличение ν_{\max} не должно приводить к заметному изменению энергии соответствующего связанного состояния. В координатном представлении область аппроксимации искомой функции конечной суммой ряда по осцилляторным функциям растет с ростом ν_{\max} как $\sqrt{\nu_{\max}}$.

1.4. Система уравнений АВМРГ для непрерывного спектра

В задаче непрерывного спектра, когда ядерные кластеры при своем движении могут удаляться друг от друга на сколь угодно большие расстояния, т.е. совершают инфинитное движение, отбрасывание в разложении волновой функции (1.10) слагаемых с большими значениями ν привело бы к нарушению асимптотического поведения волновой функции. Однако, его можно правильно учесть, заменив коэффициенты разложения, начиная с некоторого большого $\nu = \nu_{\text{ас}}$, соответствующими асимптотическими выражениями [9, 26]:

$$C_{J^\pi M l s \nu}^{(\text{ас})} = \sqrt{\frac{8\pi m(2l+1)r_0}{k^3 \hbar \bar{q}_0}} \left[\cos \delta_{Jl} F_l(\eta, kr_0 \bar{q}_0) + \sin \delta_{Jl} G_l(\eta, kr_0 \bar{q}_0) \right]. \quad (1.30)$$

Здесь $\bar{q}_0 = \sqrt{2\nu + 3}$ – безразмерная точка поворота осцилляторной функции (изме-

ряемая в единицах осцилляторного радиуса), F_l, G_l – кулоновские функции [124, 125], $k = \sqrt{2mE_{\text{ц.м.}}} / \hbar$ – волновое число, $\eta = e^2 Z_1 Z_2 \sqrt{mA_1 A_2} / \hbar \sqrt{2(A_1 + A_2)E_{\text{ц.м.}}}$ – кулоновский параметр, $E_{\text{ц.м.}} = E - E_{\text{внутр}}$ – энергия относительного движения сталкивающихся кластеров (ядер) в системе центра масс, $E_{\text{внутр}}$ – сумма внутренних энергий кластеров, δ_{Jl} – ядерная фаза (фазовый сдвиг). В результате (1.17) сводится к конечной системе линейных неоднородных алгебраических уравнений [15]:

$$\sum_{s,l} \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_{\text{ac}}-2} \left(\langle J^\pi M \tilde{l} \tilde{s} \tilde{\nu} | H | J^\pi M l s \nu \rangle - E \delta_{\tilde{s}s} \delta_{\tilde{l}l} \delta_{\tilde{\nu}\nu} \right) C_{J^\pi M l s \nu}^{(\text{H})} = F_{J^\pi M \tilde{l} \tilde{s} \tilde{\nu}}, \quad (1.31)$$

$$\tilde{\nu} = \nu_0, \nu_0 + 2, \dots, \nu_{\text{ac}},$$

$$F_{J^\pi M \tilde{l} \tilde{s} \tilde{\nu}} = - \sum_{s,l} \sum_{\nu=\nu_{\text{ac}}}^{\nu_{\text{макс}}} \langle J^\pi M \tilde{l} \tilde{s} \tilde{\nu} | H | J^\pi M l s \nu \rangle C_{J^\pi M l s \nu}^{(\text{ac})}, \quad (1.32)$$

где $\nu_{\text{макс}}$ – число осцилляторных квантов, достаточно большое для того чтобы в (1.32) всеми слагаемыми с $\nu > \nu_{\text{макс}}$ можно было пренебречь. Уравнения (1.31) образуют замкнутую систему для нахождения неизвестных коэффициентов $C_{J^\pi M l s \nu}^{(\text{H})}$ при $\nu < \nu_{\text{ac}}$ и ядерной фазы δ_{Jl} .

Следует отметить, что выражение (1.30) получено для волновой функции непрерывного спектра, нормированной на единичную плотность потока вероятности. Кроме того, более точные по сравнению с (1.30) асимптотические выражения для коэффициентов разложения приведены в работах [14, 135, 136].

1.5. Внутренние волновые функции кластеров

При вычислениях в рамках АВМРГ в качестве внутренних волновых функций кластеров $\phi_{\text{тр.инв.}}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) обычно используют волновые функции нижайших, допустимых принципом Паули, состояний трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек [12] с тем же значением осцилляторного радиуса, что и в функциях $f_{\nu}(q)$ (1.9). Для того чтобы упростить вычисления матричных элементов операторов на базисных функциях АВМРГ (1.11), внутренние трансляционно-

инвариантные волновые функции кластеров нужно выразить через волновые функции обычной (трансляционно-неинвариантной) осцилляторной модели оболочек $\phi^{(i)}$ ($i = 1, 2$) [12], которые представимы в виде антисимметризованных произведений волновых функций одночастичных состояний нуклонов. Используя в вычислениях волновые функции обычной осцилляторной модели оболочек с последующим выделением движения центра масс системы, можно относительно легко получать все необходимые матричные элементы.

Из теоремы Бете–Роуза–Эллиотта–Скирма (теорема БРЭС) [12, 137, 138] следует, что волновые функции нижайших среди разрешенных принципом Паули состояний обычной и трансляционно-инвариантной осцилляторных моделей оболочек связаны равенством

$$\phi^{(i)} = \phi_{\text{тр.инв.}}^{(i)} \exp\left(-\frac{A_i}{2} \left(\frac{\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}^{(i)}}{r_0}\right)^2\right), \quad i = 1, 2. \quad (1.33)$$

В данном равенстве экспоненциальный множитель представляет собой осцилляторную волновую функцию нулевых колебаний центра масс кластера.

Отметим, что описание системы A нуклонов в рамках трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек с помощью координат Якоби [7, 12], соответствующих разбиению системы на две подсистемы с A_1 и A_2 нуклонами ($A = A_1 + A_2$), приводит к тому, что полный гамильтониан системы записывается в виде суммы гамильтонианов трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек для первой и второй подсистем и осцилляторного гамильтониана относительного движения центров масс этих подсистем. В результате волновые функции трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек, описывающие состояния данной системы A нуклонов, сводятся к произведению волновых функций трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек, описывающих подсистемы с A_1 и A_2 нуклонами, и осцилляторной волновой функции их относительного движения, зависящей от вектора Якоби (1.2) [7, 12]. Отсюда следует, что полные волновые функции системы, состоящей из двух кластеров с A_1 и A_2 нуклонами, в рамках АВМРГ представляют собой, фактически,

разложения по собственным волновым функциям трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек для данной системы. Однако, в АВМРГ при описании внутреннего состояния кластеров ограничиваются только одной волновой функцией трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек, в то время как волновая функция относительного движения раскладывается по полному набору многочастичных осцилляторных функций.

1.6. Техника производящих функций

Задача вычисления матричных элементов на полностью антисимметризованных базисных волновых функциях АВМРГ (1.13) является достаточно сложной. Однако, разработан изящный способ ее решения, называемый техникой производящих функций [8, 15–17, 19]. Этот способ заключается в следующем: для базисных функций (1.13) вводится производящая функция, после чего строятся матричные элементы на производящих функциях, с помощью которых вычисляются матричные элементы на базисных функциях (1.13). Матричные элементы на базисных функциях (1.11) получаются из матричных элементов на базисных функциях (1.13) путем применения соотношения (1.16).

Основой техники производящих функций является соотношение между волновыми функциями трехмерного гармонического осциллятора (1.14) и производящей для них функцией

$$\exp\left(-\frac{1}{2}q^2 + \mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{1}{4}R^2\right) \quad (1.34)$$

(все длины измеряем в единицах осцилляторного радиуса), которое имеет вид:

$$f_{vlm}(\mathbf{q}) = A_{vl} \frac{\partial^v}{\partial R^v} \int \exp\left(-\frac{1}{2}q^2 + \mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{1}{4}R^2\right) Y_{lm}(\mathbf{n}_R) d\mathbf{n}_R \Big|_{R=0}, \quad (1.35)$$

$$A_{vl} = \frac{2^{v-1/2}}{\pi^{3/2} v!} \sqrt{\Gamma\left(\frac{v-l+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v+l+3}{2}\right)}, \quad (1.36)$$

где \mathbf{R} – генераторный параметр. Из (1.35) следует, что функция

$$\Phi_{s\sigma}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{R}) = A \left\{ \phi_{\text{тр.инв.},s\sigma}^{(1+2)} \exp\left(-\frac{1}{2}q^2 + \mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{1}{4}R^2\right) \right\} \quad (1.37)$$

является производящей для базисных волновых функций АВМРГ (1.13), т.е.

$$\Psi_{lms\sigma\nu}^{(\text{тр.инв.})} = \tilde{A}_{\nu l} \frac{\partial^\nu}{\partial R^\nu} \int \Phi_{s\sigma}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{R}) Y_{lm}(\mathbf{n}_R) d\mathbf{n}_R \Big|_{R=0}. \quad (1.38)$$

Константа $\tilde{A}_{\nu l}$ отличается от $A_{\nu l}$ (1.36) вследствие наличия нормировочной константы $N_{l\nu}$ (см. (1.13)).

Перейдем от функций $\phi_{\text{тр.инв.},s\sigma}^{(1)}$, $\phi_{\text{тр.инв.},s\sigma}^{(2)}$ и $\Psi_{lms\sigma\nu}^{(\text{тр.инв.})}$ к функциям $\phi_{s\sigma}^{(1)}$, $\phi_{s\sigma}^{(2)}$ и $\Psi_{lms\sigma\nu}$ соответственно, которые связаны между собой соотношением (1.33). Этот переход обусловлен тем, что вычисления с волновыми функциями обычной осцилляторной модели оболочек оказываются значительно проще. В результате из (1.33) и (1.37) следует, что функция

$$\Phi_{s\sigma}(\mathbf{R}) = A \left\{ \phi_{s\sigma}^{(1+2)} \exp\left(\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{1}{4}R^2\right) \right\} \quad (1.39)$$

является производящей для функций $\Psi_{lms\sigma\nu}$, т.е.

$$\Psi_{lms\sigma\nu} = \tilde{A}_{\nu l} \frac{\partial^\nu}{\partial R^\nu} \int \Phi_{s\sigma}(\mathbf{R}) Y_{lm}(\mathbf{n}_R) d\mathbf{n}_R \Big|_{R=0}. \quad (1.40)$$

Для дальнейших вычислений удобно сделать замену генераторного параметра

$$\mathbf{R} \rightarrow -\sqrt{A_1 A_2 / (A_1 + A_2)} \mathbf{R}. \quad (1.41)$$

Тогда (1.39) приобретает вид:

$$\Phi_{s\sigma}(\mathbf{R}) = A \left\{ \phi_{s\sigma}^{(1+2)} \exp\left(-\sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}} \mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{1}{4} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} R^2\right) \right\}. \quad (1.42)$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \Phi_{s\sigma}(\mathbf{R}) = A \left\{ \phi_{s\sigma}^{(1+2)} \exp\left(\sum_{n=A_1+1}^{A_1+A_2} \mathbf{r}_n \mathbf{R} - \frac{1}{4} A_2 R^2\right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-A_2 \mathbf{R}_{\text{л.м.}} \mathbf{R} + \frac{1}{4} (A_1 + A_2) \left[\frac{A_2}{A_1 + A_2} R\right]^2\right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где $\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}$ – радиус-вектор центра масс всей системы. Функция (1.43) содержит движение общего центра масс в виде осцилляторной волновой функции нулевых колебаний

$$\exp\left(-\frac{(A_1 + A_2)\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}^2}{2}\right). \quad (1.44)$$

Как следствие, в функции

$$\tilde{\Phi}_{s\sigma}(\mathbf{R}) = \Phi_{s\sigma}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{R})\tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}(\mathbf{R}) = A \left\{ \phi_{s\sigma}^{(1+2)} \exp\left(\sum_{n=A_1+1}^{A_1+A_2} \mathbf{r}_n \mathbf{R} - \frac{1}{4} A_2 R^2\right)\right\} \quad (1.45)$$

движение общего центра масс описывается функцией

$$\tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}(\mathbf{R}) = \exp\left\{(A_1 + A_2) \left(-\frac{1}{2} R_{\text{ц.м.}}^2 + \mathbf{R}_{\text{ц.м.}} \left[\frac{A_2}{A_1 + A_2} \mathbf{R}\right] - \frac{1}{4} \left[\frac{A_2}{A_1 + A_2} R\right]^2\right)\right\}. \quad (1.46)$$

Функция (1.45) является более удобной для вычислений, поскольку имеет более простую, чем функция (1.42), зависимость от одночастичных координат. Для того чтобы еще больше упростить функцию (1.45), в качестве первого кластера нужно рассматривать кластер, содержащий большее число нуклонов.

Движение центра масс системы входит в матричные элементы трансляционно-инвариантного оператора V на функциях (1.45) в виде интеграла перекрытия

$$\langle \tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}(\mathbf{Q}) | \tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}(\mathbf{R}) \rangle = \left(\frac{\pi}{A_1 + A_2}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{A_2^2}{2(A_1 + A_2)} \mathbf{Q} \mathbf{R}\right). \quad (1.47)$$

Матричные элементы этого оператора на производящих функциях (1.37), генерирующих трансляционно-инвариантный базис АВМРГ (1.13), получаются из матричных элементов на функциях (1.45) путем деления на интеграл перекрытия (1.47):

$$\langle \Phi_{s_f \sigma_f}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{Q}) | V | \Phi_{s_i \sigma_i}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{R}) \rangle = \frac{\langle \tilde{\Phi}_{s_f \sigma_f}(\mathbf{Q}) | V | \tilde{\Phi}_{s_i \sigma_i}(\mathbf{R}) \rangle}{\langle \tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}(\mathbf{Q}) | \tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}(\mathbf{R}) \rangle}. \quad (1.48)$$

Здесь i, f – индексы начального и конечного состояний. В соответствии с (1.38) матричные элементы на трансляционно-инвариантных базисных волновых функциях АВМРГ (1.13) связаны с матричными элементами (1.48) на производящих функциях (1.37) соотношением

$$\begin{aligned} & \langle l_f m_f s_f \sigma_f \nu_f | V | l_i m_i s_i \sigma_i \nu_i \rangle = \\ & = \bar{A}_{\nu_f l_f} \bar{A}_{\nu_i l_i} \frac{\partial^{\nu}}{\partial Q^{\nu}} \frac{\partial^{\nu}}{\partial R^{\nu}} \int Y_{l_f m_f}^* (\mathbf{n}_Q) \langle \Phi_{s_f \sigma_f}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{Q}) | V | \Phi_{s_i \sigma_i}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{R}) \rangle Y_{l_i m_i} (\mathbf{n}_R) d\mathbf{n}_Q d\mathbf{n}_R \Big|_{Q=R=0}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Константы $\bar{A}_{\nu l}$ очевидным образом отличаются от $\tilde{A}_{\nu l}$ вследствие замены генераторного параметра (1.41). Кроме того, отметим, что домножение производящей функции на константу, т.е. преобразование

$$\Phi_{s\sigma}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{R}) \rightarrow \Phi_{s\sigma}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{R}) / \sqrt{C}, \quad (1.50)$$

не меняет вида формулы (1.49) за исключением конкретных значений величин $\bar{A}_{\nu l}$. Поэтому в дальнейшем выбор C определяется из соображений упрощения записи выражений для производящих матричных элементов, которые будем обозначать

$$\langle \mathbf{Q}, s_f \sigma_f | V | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle \equiv \frac{1}{C} \langle \Phi_{s_f \sigma_f}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{Q}) | V | \Phi_{s_i \sigma_i}^{(\text{тр.инв.})}(\mathbf{R}) \rangle. \quad (1.51)$$

Выражение (1.49) для матричных элементов можно записать в следующем наиболее удобном для вычислений конечном виде:

$$\begin{aligned} & \langle l_f m_f s_f \sigma_f \nu_f | V | l_i m_i s_i \sigma_i \nu_i \rangle = \\ & = \frac{1}{\kappa_{\nu_f l_f s_f} \kappa_{\nu_i l_i s_i} \nu_f! \nu_i!} \frac{\partial^{\nu_f}}{\partial Q^{\nu_f}} \frac{\partial^{\nu_i}}{\partial R^{\nu_i}} \int Y_{l_f m_f}^* (\mathbf{n}_Q) \langle \mathbf{Q}, s_f \sigma_f | V | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle Y_{l_i m_i} (\mathbf{n}_R) d\mathbf{n}_Q d\mathbf{n}_R \Big|_{Q=R=0}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

в котором величины $\kappa_{\nu l s}$ обеспечивают нормировку и определяются условием

$$(\nu!)^2 \kappa_{\nu l s}^2 = \frac{\partial^{\nu}}{\partial Q^{\nu}} \frac{\partial^{\nu}}{\partial R^{\nu}} \iint Y_{lm}^* (\mathbf{n}_Q) \langle \mathbf{Q}, s\sigma | \mathbf{R}, s\sigma \rangle Y_{lm} (\mathbf{n}_R) d\mathbf{n}_Q d\mathbf{n}_R \Big|_{Q=R=0}, \quad (1.53)$$

вытекающим из условия ортонормированности базисных волновых функций АВМРГ (1.13). Отметим, что из (1.52) следует обратное соотношение, выражающее производящие матричные элементы через матричные элементы на базисных волновых функциях АВМРГ (1.13):

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{Q}, s_f \sigma_f | V | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle = \\ & = \sum_{\nu_f l_f m_f \nu_i l_i m_i} \kappa_{\nu_f l_f s_f} \kappa_{\nu_i l_i s_i} Q^{\nu_f} R^{\nu_i} Y_{l_f m_f}^* (\mathbf{n}_Q) \langle l_f m_f s_f \sigma_f \nu_f | V | l_i m_i s_i \sigma_i \nu_i \rangle Y_{l_i m_i}^* (\mathbf{n}_R). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Если в (1.54) под V подразумевать единичный оператор, то с учетом ортонормированности функций (1.13) и теоремы сложения для полиномов Лежандра, записанной в терминах сферических функций [123, 129]

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_Q \mathbf{n}_R) = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}_Q) Y_{lm}(\mathbf{n}_R), \quad (1.55)$$

получаем следующее выражение для интеграла перекрытия производящих функций:

$$\langle \mathbf{Q}, s_f \sigma_f | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle = \sum_{v_i l_i} \frac{2l_i + 1}{4\pi} \kappa_{v_i l_i s_i}^2 Q^{v_i} R^{l_i} P_{l_i}(\mathbf{n}_Q \mathbf{n}_R) \delta_{s_f s_i} \delta_{\sigma_f \sigma_i}. \quad (1.56)$$

Полученное выражение диагонально по квантовым числам s , σ и не зависит от σ . Также весьма существенно, что зависимость от направления векторов \mathbf{Q} и \mathbf{R} входит в (1.56) в виде скалярного произведения $(\mathbf{n}_Q \mathbf{n}_R)$ соответствующих им единичных векторов. Это позволяет упростить (1.53), частично выполнив в нем интегрирование. Действительно, просуммировав обе части (1.53) по m от $-l$ до l , разделив на $2l + 1$ и используя (1.55), получаем:

$$(v!)^2 \kappa_{vls}^2 = 2\pi \frac{\partial^v}{\partial Q^v} \frac{\partial^v}{\partial R^v} \int_{-1}^1 \langle \mathbf{Q}, s\sigma | \mathbf{R}, s\sigma \rangle P_l(t) dt \Big|_{Q=R=0}, \quad (1.57)$$

где $t = (\mathbf{n}_Q \mathbf{n}_R) = \cos \theta_{QR}$, θ_{QR} – угол между векторами \mathbf{Q} и \mathbf{R} .

Матричные элементы на нормированных базисных волновых функциях (1.11) можно выразить через матричные элементы на нормированных базисных волновых функциях (1.13) путем применения формулы (1.16):

$$\begin{aligned} & \langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s_f v_f | V | J_i^{\pi_i} M_i l_i s_i v_i \rangle = \\ & = \sum_{\substack{m_f + \sigma_f = M_f, \\ m_i + \sigma_i = M_i}} C_{l_f m_f s_f \sigma_f}^{J_f M_f} C_{l_i m_i s_i \sigma_i}^{J_i M_i} \langle l_f m_f s_f \sigma_f v_f | V | l_i m_i s_i \sigma_i v_i \rangle. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Подставляя сюда выражение (1.52), получим:

$$\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s_f v_f | V | J_i^{\pi_i} M_i l_i s_i v_i \rangle = \frac{1}{\kappa_{v_f l_f s_f} \kappa_{v_i l_i s_i} v_f! v_i!} \frac{\partial^{v_f}}{\partial Q^{v_f}} \frac{\partial^{v_i}}{\partial R^{v_i}} I_{i \rightarrow f}(Q, R) \Big|_{Q=R=0}, \quad (1.59)$$

$$I_{i \rightarrow f}(Q, R) = \quad (1.60)$$

$$= \sum_{\substack{m_f + \sigma_f = M_f, \\ m_i + \sigma_i = M_i}} C_{l_f m_f s_f \sigma_f}^{J_f M_f} C_{l_i m_i s_i \sigma_i}^{J_i M_i} \iint Y_{l_f m_f}^*(\mathbf{n}_Q) \langle \mathbf{Q}, s_f \sigma_f | V | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_R) d\mathbf{n}_Q d\mathbf{n}_R.$$

Таким образом, для вычисления матричных элементов оператора V на базисных волновых функциях АВМРГ (1.11) по формуле (1.59) необходимо сначала вычислить матричные элементы этого оператора на производящих функциях (1.37), которые затем нужно проинтегрировать со сферическими функциями. Полученное выражение суммируется с коэффициентами Клебша–Гордана и, наконец, в соответствии с (1.59) дифференцируется по генераторным параметрам Q и R .

1.7. Производящие матричные элементы оператора, представимого в виде суммы одно- и двухчастичных операторов

Функции вида (1.45) представляют собой антисимметризованные произведения одночастичных функций:

$$\tilde{\Phi}_{s_i \sigma_i}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = A \prod_{j=1}^A \phi_j(\mathbf{r}_j), \quad (1.61)$$

$$\tilde{\Phi}_{s_f \sigma_f}(\mathbf{Q}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = A \prod_{j=1}^A \varphi_j(\mathbf{r}_j). \quad (1.62)$$

Для простоты записи генераторные параметры \mathbf{R} и \mathbf{Q} в одночастичных функциях не пишем. Представим функции (1.61) и (1.62) в виде определителей (детерминантов) Слэтера:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{s_i \sigma_i}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) &= \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\mathbf{r}_1) & \phi_2(\mathbf{r}_1) & \dots & \phi_A(\mathbf{r}_1) \\ \phi_1(\mathbf{r}_2) & \phi_2(\mathbf{r}_2) & \dots & \phi_A(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1(\mathbf{r}_A) & \phi_2(\mathbf{r}_A) & \dots & \phi_A(\mathbf{r}_A) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{\{j_1, j_2, \dots, j_A\}} (-1)^{P(\{j_1, j_2, \dots, j_A\})} \phi_{j_1}(\mathbf{r}_1) \phi_{j_2}(\mathbf{r}_2) \dots \phi_{j_A}(\mathbf{r}_A), \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{s_f \sigma_f}(\mathbf{Q}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) &= \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(\mathbf{r}_1) & \varphi_2(\mathbf{r}_1) & \dots & \varphi_A(\mathbf{r}_1) \\ \varphi_1(\mathbf{r}_2) & \varphi_2(\mathbf{r}_2) & \dots & \varphi_A(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1(\mathbf{r}_A) & \varphi_2(\mathbf{r}_A) & \dots & \varphi_A(\mathbf{r}_A) \end{vmatrix} = \quad (1.64) \\ &= \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{\{j_1, j_2, \dots, j_A\}} (-1)^{P(\{j_1, j_2, \dots, j_A\})} \varphi_{j_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{j_2}(\mathbf{r}_2) \dots \varphi_{j_A}(\mathbf{r}_A), \end{aligned}$$

где $P(\{j_1, j_2, \dots, j_A\})$ – четность перестановки $\{j_1, j_2, \dots, j_A\}$ индексов $\{1, 2, \dots, A\}$.

Предполагаем, что в (1.63), (1.64) функции одночастичных состояний преобразованы таким образом, чтобы удовлетворять условию ортогональности

$$\langle \varphi_k | \varphi_j \rangle \sim \delta_{kj}. \quad (1.65)$$

Это условие не всегда оказывается выполненным для одночастичных функций в (1.61), (1.62). Однако, условие (1.65) можно удовлетворить, используя свойства определителя и преобразуя с их помощью одночастичные функции.

Относительно просто вычисляются матричные элементы на функциях (1.63), (1.64) для оператора, представимого в виде суммы двухчастичных операторов

$$V = \sum_{k>j=1}^A V(k, j), \quad (1.66)$$

где $V(k, j)$ – двухчастичный оператор, относящийся к k -ому и j -ому нуклонам (частным случаем такого оператора является одночастичный оператор $V(j)$). Оператором вида (1.66) является, например, гамильтониан (1.18), рассматриваемый в настоящей работе. Общая формула для вычисления матричных элементов оператора (1.66) на функциях (1.63), (1.64) может быть записана в виде [7, 12]:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_{s_f \sigma_f}(\mathbf{Q}) | V | \tilde{\Phi}_{s_i \sigma_i}(\mathbf{R}) \rangle &= \sum_{k>j=1}^A \left(\langle \varphi_k(\mathbf{r}_1) | \langle \varphi_j(\mathbf{r}_2) | V(1, 2) | \varphi_j(\mathbf{r}_2) \rangle | \varphi_k(\mathbf{r}_1) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle \varphi_k(\mathbf{r}_1) | \langle \varphi_j(\mathbf{r}_2) | V(1, 2) | \varphi_k(\mathbf{r}_2) \rangle | \varphi_j(\mathbf{r}_1) \rangle \right) \prod_{l \neq k, j} \langle \varphi_l | \varphi_l \rangle. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Ключевым моментом при получении данной формулы является именно условие ортогональности (1.65). В отличие от функций (1.63) и (1.64), каждая из которых содержит $A!$ слагаемых, формула (1.67) содержит $A(A-1)/2$ слагаемых, что весьма существенно при вычислении матричных элементов. По формуле (1.67) все необ-

ходимые матричные элементы на функциях (1.63), (1.64) находятся путем последовательного перебора всех возможных пар одночастичных состояний и вычислением двухчастичных матричных элементов. После этого, если оператор (1.66) является трансляционно-инвариантным, используя соотношение (1.48), получаем матричные элементы уже на производящих функциях (1.37), из которых, в свою очередь, по формулам (1.52), (1.59) следуют матричные элементы на базисных волновых функциях АВМРГ.

В случае оператора

$$V = \sum_{j=1}^A V(j), \quad (1.68)$$

являющегося суммой одночастичных операторов $V(j)$, имеет место более простая, чем (1.67), формула:

$$\langle \tilde{\Phi}_{s_f \sigma_f}(\mathbf{Q}) | V | \tilde{\Phi}_{s_i \sigma_i}(\mathbf{R}) \rangle = \sum_{j=1}^A \langle \phi_j(\mathbf{r}_1) | V(j) | \phi_j(\mathbf{r}_1) \rangle \prod_{l \neq j} \langle \phi_l | \phi_l \rangle. \quad (1.69)$$

Рассматриваемые в настоящей работе операторы имеют либо вид (1.66), либо сводятся к совокупности операторов (1.66) и (1.68).

1.8. Матричные элементы операторов кинетической энергии и центрального взаимодействия в базисе АВМРГ

Матрицы оператора кинетической энергии (1.19) и операторов кулоновского (1.20) и центрального ядерного (1.22) взаимодействий диагональны по квантовым числам l, m, s, σ и не зависят от m, σ :

$$\langle l_f m_f s_f \sigma_f \nu_f | V | l_i m_i s_i \sigma_i \nu_i \rangle = \langle l_i s_i \nu_f | V | l_i s_i \nu_i \rangle \delta_{l_f l_i} \delta_{s_f s_i} \delta_{m_f m_i} \delta_{\sigma_f \sigma_i}, \quad (1.70)$$

где величина $\langle l_i s_i \nu_f | V | l_i s_i \nu_i \rangle$ является аналогом приведенного матричного элемента из теоремы Вигнера–Экарта [122]. Таким образом, отличные от нуля матричные элементы (1.70) в соответствии с (1.52) имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle l_i m_i s_i \sigma_i \nu_f | V | l_i m_i s_i \sigma_i \nu_i \rangle &= \langle l_i s_i \nu_f \| V \| l_i s_i \nu_i \rangle = \\ &= \frac{1}{\kappa_{\nu_f l_i s_i} \kappa_{\nu_i l_i s_i} \nu_f! \nu_i!} \frac{\partial^{\nu_f}}{\partial Q^{\nu_f}} \frac{\partial^{\nu_i}}{\partial R^{\nu_i}} \int Y_{l_i m_i}^*(\mathbf{n}_Q) \langle \mathbf{Q}, s_i \sigma_i | V | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_R) d\mathbf{n}_Q d\mathbf{n}_R \Big|_{Q=R=0}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Исследуем зависимость производящих матричных элементов рассматриваемых в данном разделе операторов от направления генераторных параметров \mathbf{Q} и \mathbf{R} . С учетом (1.70) и теоремы сложения для полиномов Лежандра (1.55) соотношение (1.54) для производящих матричных элементов преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}, s_f \sigma_f | V | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle &= \\ &= \sum_{\nu_f \nu_i} \frac{2l_i + 1}{4\pi} \kappa_{\nu_f l_i s_i} \kappa_{\nu_i l_i s_i} Q^{\nu_f} R^{\nu_i} \langle l_i s_i \nu_f \| V \| l_i s_i \nu_i \rangle P_{l_i}(\mathbf{n}_Q \mathbf{n}_R) \delta_{s_f s_i} \delta_{\sigma_f \sigma_i}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Получаем, что полином Лежандра $P_l(t)$, где $t = (\mathbf{n}_Q \mathbf{n}_R) = \cos \theta_{QR}$, определяет зависимость производящего матричного элемента (1.72) от направлений векторов \mathbf{Q} и \mathbf{R} .

В результате, выполняя те же действия, что и при переходе от условия (1.53) к условию (1.57), получаем для матричных элементов (1.71) упрощенное выражение:

$$\begin{aligned} \langle l_i m_i s_i \sigma_i \nu_f | V | l_i m_i s_i \sigma_i \nu_i \rangle &= \langle l_i s_i \nu_f \| V \| l_i s_i \nu_i \rangle = \\ &= \frac{2\pi}{\kappa_{\nu_f l_i s_i} \kappa_{\nu_i l_i s_i} \nu_f! \nu_i!} \frac{\partial^{\nu_f}}{\partial Q^{\nu_f}} \frac{\partial^{\nu_i}}{\partial R^{\nu_i}} \int_{-1}^1 \langle \mathbf{Q}, s_i \sigma_i | V | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle P_{l_i}(t) dt \Big|_{Q=R=0}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Переходя от матричных элементов (1.70) к матричным элементам в базисе АВМРГ (1.11) с использованием соотношения (1.16), получаем:

$$\begin{aligned} \langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s_f \nu_f | V | J_i^{\pi_i} M_i l_i s_i \nu_i \rangle &= \langle l_i s_i \nu_f \| V \| l_i s_i \nu_i \rangle \delta_{J_f J_i} \delta_{M_f M_i} \delta_{l_f l_i} \delta_{s_f s_i} = \\ &= 2\pi \frac{\delta_{J_f J_i} \delta_{M_f M_i} \delta_{l_f l_i} \delta_{s_f s_i}}{\kappa_{\nu_f l_i s_i} \kappa_{\nu_i l_i s_i} \nu_f! \nu_i!} \frac{\partial^{\nu_f}}{\partial Q^{\nu_f}} \frac{\partial^{\nu_i}}{\partial R^{\nu_i}} \int_{-1}^1 \langle \mathbf{Q}, s_i \sigma_i | V | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle P_{l_i}(t) dt \Big|_{Q=R=0}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Таким образом, матричные элементы (1.73) и (1.74) операторов, удовлетворяющих условию (1.70) (единичный оператор, оператор кинетической энергии, опера-

торы кулоновского и центрального ядерного взаимодействий), в базисе АВМРГ пропорциональны производной по Q и R от интеграла по t , в который, что весьма существенно, входят полиномы Лежандра $P_l(t)$. Кроме того, матричные элементы (1.74) диагональны по квантовым числам J, M, l, s и не зависят от J, M .

1.9. Матричные элементы операторов спин-орбитального и тензорного взаимодействий на базисных функциях АВМРГ

Основной целью данного раздела является приведение матричных элементов (1.59) операторов спин-орбитального (1.26) и тензорного (1.27) взаимодействий к виду, аналогичному (1.74) для матричных элементов оператора центрального взаимодействия, т.е. когда матричные элементы выражаются через производную по Q и R от интеграла по $t = \cos\theta_{QR}$ (подобное преобразование было выполнено, например, в работах [15, 19, 139]). Это позволит обобщать методики расчета матричных элементов потенциалов центральных взаимодействий на потенциалы нецентральных спин-орбитального и тензорного взаимодействий, что очень удобно, поскольку дает возможность вычислять матричные элементы гамильтониана системы на единой основе.

Рассмотрим оператор спин-орбитального взаимодействия

$$V_{ls} = \sum_{k>j=1}^A V(r_{kj})(\mathbf{l}_{kj}\mathbf{s}_{kj}), \quad (1.75)$$

в котором $V(r_{kj})$ есть некоторая функция от r_{kj} и изоспиновых переменных k -го и j -го нуклонов, $\mathbf{l}_{kj} = [\mathbf{r}_{kj} \times \mathbf{p}_{kj}]$, $\mathbf{s}_{kj} = \mathbf{s}_k + \mathbf{s}_j$ – орбитальный момент относительного движения и суммарный спин k -го и j -го нуклонов соответственно. Частным случаем оператора (1.75) является оператор (1.26). Скалярное произведение ($\mathbf{l}\mathbf{s}$) неприводимых тензорных операторов первого ранга \mathbf{l} и \mathbf{s} можно записать в виде неприводимого тензорного произведения нулевого ранга соответствующих тензорных

операторов [122]:

$$(\mathbf{ls}) = -\sqrt{3} \sum_{\mu, \mu'} C_{1\mu 1\mu'}^{00} l_{1\mu} s_{1\mu'}, \quad (1.76)$$

в котором $b_{1\mu}$ – циклические компоненты вектора \mathbf{b} [122, 123]:

$$b_{1,0} = b_z, \quad b_{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (b_x \pm ib_y). \quad (1.77)$$

Исследуем матричные элементы (1.52) оператора спин-орбитального взаимодействия (1.75) на базисных волновых функциях АВМРГ (1.13). Этот оператор не меняет значений относительного орбитального момента и канального спина. Положим в (1.52) $l_f = l_i = l$, $s_f = s_i = s$. Из теоремы Вигнера–Эккарта [122] следуют формулы:

$$\langle lm_f | (l_{kj})_{1\mu} | lm_i \rangle = \frac{\langle l \| l_{kj} \| l \rangle}{\sqrt{2l+1}} C_{lm_i 1\mu}^{lm_f}, \quad (1.78)$$

$$\langle s\sigma_f | (s_{kj})_{1\mu} | s\sigma_i \rangle = \frac{\langle s \| s_{kj} \| s \rangle}{\sqrt{2s+1}} C_{s\sigma_i 1\mu}^{s\sigma_f}. \quad (1.79)$$

В формуле (1.78) предполагается, что внутренние волновые функции кластеров имеют сферически симметричные координатные части. В результате получаем для матричных элементов (1.52) оператора (1.75) следующую зависимость от проекций относительного орбитального момента и канального спина [139]:

$$\langle lm_f s\sigma_f \nu_f | V_{ls} | lm_i s\sigma_i \nu_i \rangle = \langle l s \nu_f \| V_{ls} \| l s \nu_i \rangle \sum_m \begin{pmatrix} m_f & 1 & l \\ l & m & m_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_f & m & s \\ s & 1 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

где $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ – 3j-символ Вигнера [122, 123].

Теперь приступим к исследованию производящих матричных элементов (1.54) оператора спин-орбитального взаимодействия (1.75). Подставляя (1.80) в (1.54), получаем следующее выражение для производящих матричных элементов оператора (1.75) [139]:

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | V_{ls} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \varpi(t) \sum_{m, n_1, n_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & n_2 \\ n_1 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_f & m & s \\ s & 1 & \sigma_i \end{pmatrix} Y_{1n_2}(\mathbf{n}_Q) Y_{1n_1}^*(\mathbf{n}_R). \quad (1.81)$$

Функция $\varpi(t)$, зависящая также от генераторных параметров Q , R и канального

спина, связана с приведенными матричными элементами оператора (1.75) соотношением

$$\varpi(t) = - \sum_{l, v_i, v_f} \kappa_{v_f, l s} \kappa_{v_i, l s} Q^{v_f} R^{v_i} \langle l s v_f \| V_{l s} \| l s v_i \rangle \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j P_j(t), \quad (1.82)$$

в котором коэффициенты α_j имеют вид:

$$\alpha_{l-1} = (2l-1) \sqrt{\frac{2(2l+1)}{3l(l+1)}}, \quad \alpha_{l-2} = 0, \quad \alpha_{j-1} = \frac{2j-1}{2j+3} \alpha_{j+1} \quad (j = l-2, \dots, 1). \quad (1.83)$$

Для дальнейших вычислений функцию $\varpi(t)$ удобно представить в виде ряда

$$\varpi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m_j=-j}^j \frac{4\pi a_j}{2j+1} Y_{jm_j}^*(\mathbf{n}_Q) Y_{jm_j}(\mathbf{n}_R) \quad (1.84)$$

с коэффициентами a_j , являющимися функциями канального спина s и генераторных параметров Q, R . Кроме того, окажется полезным соотношение:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P_l^1(t) \varpi(t) dt = \frac{2l(l+1)}{2l+1} \left(\frac{a_{l-1}}{2l-1} - \frac{a_{l+1}}{2l+3} \right). \quad (1.85)$$

Для того чтобы получить данное соотношение необходимо в разложении функции $\varpi(t)$ (1.84) выразить полиномы Лежандра $P_j(t)$ через присоединенные полиномы Лежандра [125, 126]

$$(2j+1)\sqrt{1-t^2} P_j(t) = P_{j+1}^1(t) - P_{j-1}^1(t), \quad (1.86)$$

умножить $\varpi(t)$ на функцию $\sqrt{1-t^2} P_l^1(t)$, проинтегрировать по t от -1 до 1 и, наконец, учесть условие нормировки [125, 126]

$$\int_{-1}^1 P_l^1(t) P_j^1(t) dt = \frac{2l(l+1)}{2l+1} \delta_{lj}. \quad (1.87)$$

Изотропия пространства приводит к диагональности матричных элементов (1.59) оператора спин-орбитального взаимодействия (1.75) на базисных волновых функциях АВМРГ (1.11) по квантовым числам J, M и их независимости от M . Это справедливо и для величины (1.60). Поэтому положим в (1.59), (1.60) $J_f = J_i = J$, $M_f = M_i = M$. После этого подставим (1.81) в (1.60), просуммируем обе части (1.60) по всем возможным значениям M и разделим на $2J+1$. Затем, выражая коэффициенты Клебша–Гордана через $3j$ -символы и используя формулу для интеграла от

произведения трех сферических функций [122, 123], в (1.60) можно произвести суммирование по проекциям относительного орбитального момента и канального спина, а также частично осуществить интегрирование:

$$I_{i \rightarrow f}(Q, R) = (-1)^{J+s+l+1} 3(2l+1) \begin{Bmatrix} l & s & J \\ s & l & 1 \end{Bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} l & 1 & l \\ 1 & j & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j & l & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 a_j, \quad (1.88)$$

где $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$ – $6j$ -символ Вигнера [122, 123]. После подстановки в (1.88) явных

выражений

$$\begin{Bmatrix} l_2 & 1 & l_1 \\ 1 & j & 1 \end{Bmatrix} = (-1)^{l_1+j} \frac{l_1(l_1+1) - j(j+1) + 2}{2\sqrt{6l_1(l_1+1)(2l_1+1)}} (\delta_{l_1, j-1} + \delta_{l_1 j} + \delta_{l_1, j+1}) \delta_{l_1 l_2}, \quad (1.89)$$

$$\begin{pmatrix} j & l & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2l+1} \left(\frac{l+1}{2l+3} \delta_{j, l+1} + \frac{l}{2l-1} \delta_{j, l-1} \right), \quad (1.90)$$

полученных с использованием формул из [123], будем иметь:

$$I_{i \rightarrow f}(Q, R) = (-1)^{J+s+l+1} \frac{\sqrt{3l(l+1)}}{\sqrt{2(2l+1)}} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ s & l & 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{a_{l+1}}{2l+3} - \frac{a_{l-1}}{2l-1} \right). \quad (1.91)$$

С учетом (1.85) формула (1.91) преобразуется следующим образом:

$$I_{i \rightarrow f}(Q, R) = (-1)^{J+s+l} \frac{\sqrt{3(2l+1)}}{\sqrt{8l(2l+1)}} \begin{Bmatrix} l & s & J \\ s & l & 1 \end{Bmatrix} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P_l^1(t) \varpi(t) dt. \quad (1.92)$$

Интегрируя (1.92) по частям и используя соотношение [126]

$$\frac{d}{dt} \sqrt{1-t^2} P_l^1(t) = -l(l+1) P_l(t), \quad (1.93)$$

приводим величину $I_{i \rightarrow f}(Q, R)$ к следующему окончательному виду [139]:

$$I_{i \rightarrow f}(Q, R) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{J(J+1) - l(l+1) - s(s+1)}{4\sqrt{s(s+1)(2s+1)}} \int_{-1}^1 \Upsilon(t) P_l(t) dt, \quad (1.94)$$

где $\Upsilon(t)$ – первообразная функции $\varpi(t)$.

Таким образом, после подстановки (1.94) в (1.59) получаем выражение для матричных элементов оператора (1.75), аналогичное выражениям (1.73) и (1.74) для матричных элементов оператора центрального взаимодействия, т.е. пропорциональное производной по Q и R от интеграла по t , в который входит некоторая

функция, умноженная на полином Лежандра $P_l(t)$. Следовательно, для расчета матричных элементов оператора спин-орбитального взаимодействия можно применять методы расчета матричных элементов оператора центрального взаимодействия, который не меняет значения проекций относительного орбитального момента и канального спина. Следует отметить, что использование формулы (1.94) значительно упрощает вычисление матричных элементов оператора спин-орбитального взаимодействия на базисных волновых функциях АВМРГ [139]. Сначала вычисляется производящий матричный элемент этого оператора для одной конкретной пары возможных значений проекции канального спина, затем с применением формулы (1.81) из производящего матричного элемента выделяется функция $\varpi(t)$, находится ее первообразная $\Upsilon(t)$ и, наконец, по формулам (1.94) и (1.59) рассчитываются все необходимые матричные элементы оператора спин-орбитального взаимодействия на базисных волновых функциях АВМРГ (1.11).

Теперь перейдем к рассмотрению оператора тензорного взаимодействия

$$V_{\tau} = \sum_{i>j=1}^A V(r_{ij}) \left((\mathbf{s}_i \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{s}_j \mathbf{r}_{ij}) - \frac{1}{3} (\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j) \mathbf{r}_{ij}^2 \right), \quad (1.95)$$

где оператор $V(r_{ij})$ зависит от r_{ij} и изоспиновых переменных i -го и j -го нуклонов. Частным случаем оператора (1.95) является оператор (1.27). Слагаемые, входящие в (1.95), можно представить в виде неприводимых тензорных произведений нулевого ранга двух неприводимых тензоров второго ранга:

$$\sqrt{5} \sum_{\mu_1, \mu_2, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, m, \tilde{m}} s_{i,1\mu_1} s_{j,1\mu_2} C_{1\mu_1 1\mu_2}^{2m} r_{ij,1\tilde{\mu}_1} r_{ij,1\tilde{\mu}_2} C_{1\tilde{\mu}_1 1\tilde{\mu}_2}^{2\tilde{m}} C_{2m 2\tilde{m}}^{00} = (\mathbf{s}_i \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{s}_j \mathbf{r}_{ij}) - \frac{1}{3} (\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j) \mathbf{r}_{ij}^2. \quad (1.96)$$

Соотношение (1.96) позволяет установить общий вид производящих матричных элементов оператора тензорного взаимодействия (1.95) [19]. Вычисляя интеграл по пространственным координатам от тензора второго ранга

$$\sum_{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2} r_{ij,1\tilde{\mu}_1} r_{ij,1\tilde{\mu}_2} C_{1\tilde{\mu}_1 1\tilde{\mu}_2}^{2\tilde{m}} \quad (1.97)$$

в предположении, что внутренние волновые функции кластеров имеют сферически симметричные координатные части, будем получать сферические функции $Y_{2\tilde{m}}(\mathbf{n}_{\alpha\mathbf{R}+\beta\mathbf{Q}})$ в производящих матричных элементах оператора (1.95). С учетом

спиновой зависимости этого оператора получаем следующее общее выражение для его производящих матричных элементов [19]:

$$\langle \mathbf{Q}, s_f \sigma_f | V_T | \mathbf{R}, s_i \sigma_i \rangle = \sum_q f_q(Q, R, t) \sum_{m, \tilde{m}} (\alpha_q \mathbf{R} + \beta_q \mathbf{Q})^2 Y_{2\tilde{m}}(\mathbf{n}_{\alpha_q \mathbf{R} + \beta_q \mathbf{Q}}) C_{2m s_i \sigma_i}^{s_f \sigma_f} C_{2m 2\tilde{m}}^{00}, \quad (1.98)$$

где индексом q пронумерованы разные слагаемые.

Подставляя (1.98) в (1.60), суммируя по проекциям относительного орбитального и канального спина, частично интегрируя по углам и выполняя вычислительные процедуры, часть из которых с определенными усложнениями аналогична тем, что были выполнены ранее при рассмотрении оператора спин-орбитального взаимодействия (1.75), получаем выражение, аналогичное выражению из работы [19], полученному для случая тензорного потенциала, имеющего гауссовскую координатную зависимость:

$$I_{i \rightarrow f}(Q, R) = (-1)^{J+l_i+s_i} 10 \sqrt{6\pi (2l_i+1)(2l_f+1)(2s_f+1)} \begin{Bmatrix} 2 & l_i & l_f \\ J & s_f & s_i \end{Bmatrix} \times \quad (1.99)$$

$$\times \sum_{q,l} \sum_{\lambda_1+\lambda_2=2} \frac{(-1)^{\lambda_2} \alpha^{\lambda_1} \beta^{\lambda_2}}{\sqrt{(2\lambda_1)!(2\lambda_2)!}} \begin{Bmatrix} 2 & l_i & l_f \\ l & \lambda_2 & \lambda_1 \end{Bmatrix} C_{l_i 0 \lambda_1 0}^{l 0} C_{l_f 0 \lambda_2 0}^{l 0} R^{\lambda_1} Q^{\lambda_2} \int_{-1}^1 f_q(Q, R, t) P_l(t) dt.$$

После подстановки (1.99) в (1.59) так же, как и в случае оператора спин-орбитального взаимодействия (1.75), приходим к выражению для матричных элементов оператора тензорного взаимодействия (1.95), аналогичному выражениям (1.73) и (1.74) для матричных элементов оператора центрального взаимодействия. Поэтому матричные элементы оператора тензорного взаимодействия можно вычислять с использованием методов расчета матричных элементов оператора центрального взаимодействия. Таким образом, цель, поставленная в самом начале данного раздела, достигнута.

1.10. Техника рекуррентных соотношений

Вычисление матричных элементов на базисных волновых функциях АВМРГ (1.11) или (1.13) с использованием формул (1.59) или (1.52) соответственно

намного удобнее, чем с использованием этих волновых функций в явном виде. В последнем случае потребовалось бы для каждого матричного элемента проводить вычисление многократных интегралов от выражений, содержащих чрезвычайно большое число слагаемых вследствие антисимметризации. Тем не менее, формулы (1.52), (1.59) остаются достаточно сложными для проведения конкретных расчетов, особенно при больших числах осцилляторных квантов. Более эффективным и ориентированным именно на численные расчеты способом вычисления матричных элементов является техника рекуррентных соотношений, предложенная в работе [15] и основанная на использовании выражения (1.59), а также явного вида оператора. В работе [15] для гауссовского и кулоновского потенциалов взаимодействия, а затем и для юкавского в [140] были найдены дифференциальные уравнения по R и Q , которым удовлетворяет функция (1.60). Из этих уравнений следуют рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять все необходимые матричные элементы.

В настоящей работе, как уже было сказано ранее, в качестве ядерного потенциала выбран модифицированный потенциал Хазегавы–Нагаты, координатная зависимость которого имеет вид суперпозиции гауссоид. В предыдущем разделе, в котором изложены основные результаты работ [15, 19, 139], показано, что матричные элементы операторов спин-орбитального и тензорного (нецентральных) взаимодействий могут быть выражены через матричные элементы оператора некоторого центрального ядерного взаимодействия. Далее именно на примере центрального потенциала с гауссовской координатной зависимостью будет показано, каким образом можно получать рекуррентные соотношения для вычисления матричных элементов [15].

Линейные комбинации функций

$$M(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) = \exp\left(-a(\alpha\mathbf{R} + \beta\mathbf{Q})^2 + 2c\mathbf{Q}\mathbf{R}\right), \quad (1.100)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{R}M(\mathbf{Q}, \mathbf{R}), \quad Q^2M(\mathbf{Q}, \mathbf{R}), \quad R^2M(\mathbf{Q}, \mathbf{R}), \quad (1.101)$$

коэффициенты которых не зависят от Q и R , образуют производящие матричные элементы оператора центрального ядерного взаимодействия (1.25) [15]. При этом

коэффициенты разложения функций

$$F^{(l)}(Q, R) = \int_{-1}^1 M(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) P_l(t) dt, \quad (1.102)$$

$$\tilde{F}^{(l)}(Q, R) = \int_{-1}^1 (\mathbf{QR}) M(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) P_l(t) dt \quad (1.103)$$

в ряд по степеням генераторных параметров Q и R являются с точностью до множителя вкладами в матричные элементы на базисных волновых функциях АВМРГ (1.59) от слагаемых вида (1.100) и (1.101) соответственно в производящих матричных элементах. Учитывая рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра [125–127]

$$tP_l(t) = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(t) + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(t), \quad (1.104)$$

позволяющее выразить функцию (1.103) через функцию (1.102)

$$\tilde{F}^{(l)}(Q, R) = \frac{l+1}{2l+1} QR F^{(l+1)}(Q, R) + \frac{l}{2l+1} QR F^{(l-1)}(Q, R), \quad (1.105)$$

нетрудно установить связь между коэффициентами разложения функции (1.103) и коэффициентами разложения функции (1.102). Следовательно, вычисляя коэффициенты разложения $U_{\mu\nu}^{(l)}$ одной только функции (1.102) в ряд

$$F^{(l)}(Q, R) = \sum_{\mu, \nu=l}^{\infty} U_{\mu\nu}^{(l)} Q^{\mu} R^{\nu} \quad (1.106)$$

по степеням генераторных параметров Q , R и умножая эти коэффициенты разложения $U_{\mu\nu}^{(l)}$ на $[\kappa_{\mu l} \kappa_{\nu l}]^{-1}$, получим вклады в матричные элементы (1.59) от слагаемых вида (1.100) в производящих матричных элементах, а с использованием соотношения (1.105) – и от слагаемых вида (1.101).

Для коэффициентов разложения $U_{\mu\nu}^{(l)}$ можно установить рекуррентные соотношения. Для этого строятся линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных относительно Q и R , которым удовлетворяет функция (1.102), с требованием полиномиальной зависимости коэффициентов этих уравнений от Q и R . Одно из таких уравнений имеет вид [15]:

$$Q^2 \frac{\partial^2 F^{(l)}}{\partial Q^2} + (2Q + 4a\beta^2 Q^3) \frac{\partial F^{(l)}}{\partial Q} - \quad (1.107)$$

$$- [l(l+1) - 6a\beta^2 Q^2 + 4(c - a\alpha\beta)^2 R^2 Q^2 - 4a^2 \beta^4 Q^4] F^{(l)} = 0.$$

После подстановки в (1.107) разложения (1.106) и приравнивания слагаемых при одинаковых степенях параметров Q и R соответственно, получаем одно из рекуррентных соотношений [15]:

$$[\mu(\mu+1) - l(l+1)] U_{\mu\nu}^{(l)} + 2a\beta^2 (2\mu-1) U_{\mu-2,\nu}^{(l)} - \quad (1.108)$$

$$- 4(c - a\alpha\beta)^2 U_{\mu-2,\nu-2}^{(l)} + 4a^2 \beta^4 U_{\mu-4,\nu}^{(l)} = 0.$$

Симметрия функций $M(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ и $F^{(l)}(Q, R)$ относительно замены

$$\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R} \quad (1.109)$$

позволяет получить из уравнения (1.107) следующее уравнение для функции (1.102) [15]:

$$R^2 \frac{\partial^2 F^{(l)}}{\partial R^2} + (2R + 4a\alpha^2 R^3) \frac{\partial F^{(l)}}{\partial R} - \quad (1.110)$$

$$- [l(l+1) - 6a\alpha^2 R^2 + 4(c - a\alpha\beta)^2 R^2 Q^2 - 4a^2 \alpha^4 R^4] F^{(l)} = 0.$$

Подставляя в него разложение (1.106), получим другое рекуррентное соотношение для коэффициентов разложения $U_{\mu\nu}^{(l)}$ [15]:

$$[\nu(\nu+1) - l(l+1)] U_{\mu\nu}^{(l)} + 2a\alpha^2 (2\nu-1) U_{\mu,\nu-2}^{(l)} - \quad (1.111)$$

$$- 4(c - a\alpha\beta)^2 U_{\mu-2,\nu-2}^{(l)} + 4a^2 \alpha^4 U_{\mu,\nu-4}^{(l)} = 0.$$

Таким образом, имея значение только одного единственного коэффициента разложения

$$U_{ll}^{(l)} = [2(c - a\alpha\beta)]^l l!, \quad (1.112)$$

с использованием рекуррентных соотношений (1.108) и (1.111) можно получить значения всех необходимых коэффициентов разложения $U_{\mu\nu}^{(l)}$ и, как следствие, всех необходимых матричных элементов на базисных волновых функциях АВМРГ (1.59).

В заключение данного раздела отметим, что рекуррентные соотношения для

матричных элементов потенциала Юкавы в базисе волновых функций АВМРГ, полученные в работе [140], справедливы также для матричных элементов в базисе АВМРГ достаточно широкого класса потенциалов, который включает в себя и кулоновский потенциал.

Глава 2. Радиационный захват в столкновениях составных частиц

2.1. Вероятность перехода ядра между связанными состояниями

Электромагнитное взаимодействие значительно слабее ядерного в связи с чем вероятность перехода ядра в единицу времени между двумя связанными состояниями с испусканием фотона можно вычислить с помощью золотого правила Ферми (формулы для вероятности перехода в единицу времени, полученной в первом порядке нестационарной теории возмущений) [141]. С учетом длинноволнового приближения

$$\frac{R_0}{\tilde{\lambda}} \ll 1 \quad \text{или} \quad E_\gamma \ll \frac{\hbar c}{R_0} = \frac{197}{R_0} [\text{МэВ} \cdot \text{фм}], \quad (2.1)$$

где R_0 – радиус ядра, c – скорость света в вакууме, $E_\gamma = \hbar c k_\gamma$, $k_\gamma = 1/\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}$ – энергия, волновое число и длина волны испускаемого γ -кванта соответственно, которое реализуется, если переход ядра происходит между состояниями, отличающимися по энергии не больше чем на несколько МэВ, вероятность перехода в единицу времени может быть записана в виде [142–146]:

$$T_{i \rightarrow f}(\Lambda I \mu) = \frac{8\pi(I+1)}{\hbar I((2I+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c} \right)^{2I+1} \left| \left\langle J_f^{\pi_f} M_f \left| M_{I\mu}^\Lambda \right| J_i^{\pi_i} M_i \right\rangle \right|^2, \quad (2.2)$$

где $M_{I\mu}^\Lambda$ – электромагнитный мультипольный оператор, Λ – тип перехода ($\Lambda = E$ – электрический тип, $\Lambda = M$ – магнитный тип), I, μ – полный угловой момент фотона (мультипольность) и его проекция. Низшие мультиполи ($I = 1, 2, 3$) имеют следующие названия: диполь, квадруполь, октуполь. Не интересуясь различными ориентациями полных угловых моментов в начальном и конечном состояниях системы (подобный интерес возникает в поляризационных измерениях), вычислим в (2.2) арифметическое среднее по M_i -значениям и просуммируем по всем M_f - и μ -значениям. В результате вероятность перехода в единицу времени (2.2) принимает вид:

$$T_{i \rightarrow f}(\Lambda I) = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f, \mu} T_{i \rightarrow f}(\Lambda I \mu). \quad (2.3)$$

Совокупность операторов $M_{I\mu}^\Lambda$ ($\mu = -I, -I + 1, \dots, I - 1, I$) образует неприводимый тензорный оператор ранга I [122]. Таким образом, справедлива теорема Вигнера–Эккарта [122]:

$$\begin{aligned} & \langle n_f J_f^{\pi_f} M_f | M_{I\mu}^\Lambda | n_i J_i^{\pi_i} M_i \rangle = \\ & = (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & I & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle n_f J_f^{\pi_f} || M_I^\Lambda || n_i J_i^{\pi_i} \rangle = (-1)^{2I} \frac{\langle n_f J_f^{\pi_f} || M_I^\Lambda || n_i J_i^{\pi_i} \rangle}{\sqrt{2J_f + 1}} C_{J_i M_i I \mu}^{J_f M_f}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\langle n_f J_f || M_I^\Lambda || n_i J_i \rangle$ – приведенный матричный элемент, n – совокупность квантовых чисел системы за исключением J, M и π . Из (2.4) следуют правила отбора:

$$|J_i - J_f| \leq I \leq J_i + J_f, \quad (2.5)$$

$$M_f - M_i = \mu,$$

$$\pi_i \pi_f = \pi_\Lambda.$$

Четность π_Λ для электрического и магнитного мультипольных излучений соответственно равна [142–145]

$$\pi_{EI} = (-1)^I, \quad (2.6)$$

$$\pi_{MI} = (-1)^{I+1}.$$

Из правил отбора (2.5) видно, что мультипольность перехода определяется моментами и четностями начального и конечного уровней. Если момент одного из этих уровней равен нулю, то возможен переход лишь одной мультипольности. Если же моменты как начального, так и конечного состояний не равны нулю, то излучение будет состоять из нескольких мультиполей, причем основной вклад будут давать наиболее разрешенные из них.

Используя теорему Вигнера–Экарта и соотношения ортогональности для $3j$ -символов (см. [122]), в (2.3) можно произвести суммирование по M_i, M_f, μ и получить для вероятности перехода в единицу времени следующее выражение:

$$T_{i \rightarrow f}(\Lambda) = \frac{8\pi(I+1)}{\hbar I((2I+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c} \right)^{2I+1} B(\Lambda, J_i^{\pi_i} \rightarrow J_f^{\pi_f}). \quad (2.7)$$

Здесь величина $B(\Lambda, J_i^{\pi_i} \rightarrow J_f^{\pi_f})$ называется приведенной вероятностью перехода и выражается через приведенный матричный элемент:

$$B(\Lambda, J_i^{\pi_i} \rightarrow J_f^{\pi_f}) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \left\langle J_f^{\pi_f} \parallel M_I^\Lambda \parallel J_i^{\pi_i} \right\rangle \right|^2. \quad (2.8)$$

Приведенная вероятность перехода содержит всю информацию о ядерных волновых функциях. Для первых трех значений I вероятность электрического мультипольного перехода $T(EI)$ выражается через приведенную вероятность $B(EI)$, измеряемую в единицах $e^2(\text{фм})^{2I}$, по формулам [142]:

$$T(E1) = 1.587 \cdot 10^{15} E_\gamma^3 B(E1), \quad (2.9)$$

$$T(E2) = 1.223 \cdot 10^9 E_\gamma^5 B(E2),$$

$$T(E3) = 5.698 \cdot 10^2 E_\gamma^7 B(E3).$$

В свою очередь, для первых трех значений I вероятность магнитного мультипольного перехода $T(MI)$ выражается через приведенную вероятность $B(MI)$, измеряемую в единицах $\mu_N^2(\text{фм})^{2I-2}$, по формулам [142]:

$$T(M1) = 1.779 \cdot 10^{13} E_\gamma^3 B(M1), \quad (2.10)$$

$$T(M2) = 1.371 \cdot 10^7 E_\gamma^5 B(M2),$$

$$T(M3) = 6.387 \cdot 10^0 E_\gamma^7 B(M3).$$

В формулах (2.9) и (2.10) энергия E_γ измеряется в МэВ. Из формул (2.7)–(2.10) видно, что излучение с более высоким значением l является сильно подавленным. Поэтому обычно достаточно учесть только нижайшие возможные значения l . При этом магнитное излучение слабее электрического [142–145]. Обычно имеется конкуренция между $M1$ и $E2$ излучениями. Из (2.7) также следует, что вероятность перехода $T_{i \rightarrow f}$ резко увеличивается с увеличением энергии перехода.

2.2. Электрический мультипольный оператор

Электрический мультипольный оператор $M_{l\mu}^E$ определяется выражением [142–146]:

$$M_{l\mu}^E = e \sum_{i=1}^A g_l(i) |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}|^l Y_{l\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}}), \quad g_l(i) = \frac{1}{2} - t_{3,i}. \quad (2.11)$$

Оператор (2.11) записан в трансляционно-инвариантной форме [146, 147]. В общем случае электрический мультипольный оператор содержит два члена: орбитальный и спиновый. Однако, в длинноволновом приближении спиновый член пренебрежимо мал, поэтому в выражении (2.11) присутствует только орбитальный член [145]. Кроме того, в длинноволновом приближении, которое соответствует малым переданным импульсам, не существенны изменения плотности на очень малых расстояниях в силу чего при получении выражения (2.11) протоны рассматривались как точечные заряды (в случае больших переданных импульсов, когда важны изменения плотности на очень малых расстояниях, необходимо учитывать определенное распределение заряда в протоне, которое находят из экспериментов по рассеянию электронов на протонах и характеризуют фактором). Также при малых переданных импульсах по крайней мере для электрических переходов теорема Зигерта позволяет не учитывать явно мезонные степени свободы [145].

В задаче радиационного захвата особый интерес представляют электрические дипольный и квадрупольный операторы

$$M_{1\mu}^E = e \sum_{i=1}^A g_l(i) |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}| Y_{1\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}}), \quad (2.12)$$

$$M_{2\mu}^E = e \sum_{i=1}^A g_l(i) |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}|^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}}). \quad (2.13)$$

Используя явные выражения для компонент сферических функций $Y_{1\mu}$ и $Y_{2\mu}$ [122]:

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} n_z, \quad (2.14)$$

$$Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (n_x \pm i n_y),$$

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3n_z^2 - 1),$$

$$Y_{2\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\varphi} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (n_x \pm i n_y) n_z,$$

$$Y_{2\pm 2}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm i2\varphi} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (n_x \pm i n_y)^2,$$

в которых $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – вектор, положение которого в сферической системе координат определяется углами (θ, φ) , компоненты электрических дипольного и квадрупольного операторов можно преобразовать к виду:

$$M_{10}^E = \frac{e}{2A} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sum_{i>j=1}^A (g_l(i) - g_l(j))(z_i - z_j), \quad (2.15)$$

$$M_{1\pm 1}^E = \mp \frac{e}{2A} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sum_{k>j=1}^A (g_l(k) - g_l(j))(x_k - x_j \pm i(y_k - y_j)), \quad (2.16)$$

$$M_{20}^E = \frac{e}{4A^2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \sum_{i>j=1}^A [A(g_l(i) + g_l(j)) - Z][3(z_i - z_j)^2 - (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2], \quad (2.17)$$

$$M_{2\pm 1}^E = \mp \frac{e}{2A^2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sum_{k>j=1}^A [A(g_l(k) + g_l(j)) - Z][x_k - x_j \pm i(y_k - y_j)](z_k - z_j), \quad (2.18)$$

$$M_{2\pm 2}^E = \frac{e}{4A^2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sum_{k>j=1}^A [A(g_l(k) + g_l(j)) - Z][x_k - x_j \pm i(y_k - y_j)]^2. \quad (2.19)$$

Снова воспользовавшись формулами (2.14), выражения для компонент электрических дипольного (2.15), (2.16) и квадрупольного (2.17)–(2.19) операторов можно объединить соответственно в следующие общие формулы [113]:

$$M_{1\mu}^E = \sum_{i>j=1}^A M_{1\mu}^E(i, j), \quad (2.20)$$

$$M_{1\mu}^E(i, j) = \frac{e}{A} [g_l(i) - g_l(j)] |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| Y_{1\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}), \quad (2.21)$$

$$M_{2\mu}^E = \sum_{i>j=1}^A M_{2\mu}^E(i, j), \quad (2.22)$$

$$M_{2\mu}^E(i, j) = \frac{e}{A^2} \{A[g_l(i) + g_l(j)] - Z\} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}). \quad (2.23)$$

Из (2.20)–(2.23) видно, что электрические дипольный и квадрупольный операторы представлены в виде суммы двухчастичных трансляционно-инвариантных операторов. Ранее было показано, что подобная форма записи операторов наиболее удобна при вычислении их матричных элементов.

2.3. Магнитный мультипольный оператор

Магнитный мультипольный оператор $M_{I\mu}^M$ имеет вид [142–146]:

$$M_{I\mu}^M = \mu_N \sum_{i=1}^A \left\{ g_s(i) \mathbf{s}_i + \frac{2g_l(i)}{I+1} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}) \times (\mathbf{p}_i - A^{-1} \mathbf{P}_{\text{ц.м.}})] \right\} (\nabla r^I Y_{I\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}})) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}}, \quad (2.24)$$

$$g_s(i) = \frac{1}{2} (g_n + g_p) + t_{3,i} (g_n - g_p), \quad g_n = -3.826, \quad g_p = 5.586,$$

где $\mu_N = e\hbar/2mc$ – ядерный магнетон, $\mathbf{P}_{\text{ц.м.}}$ – оператор импульса центра масс системы:

$$\mathbf{P}_{\text{ц.м.}} = \sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i. \quad (2.25)$$

Оператор (2.24) так же, как и (2.11), записан в трансляционно-инвариантной форме [146, 147]. В формуле (2.24) спиновый и орбитальный члены сравнимы. Отме-

тим также, что для магнитных переходов даже при малых переданных импульсах желательно учитывать мезонные степени свободы [145]. Но, к сожалению, отсутствует надежный способ рассмотрения мезонного тока и при изучении структуры ядра этим эффектом обычно пренебрегают.

Рассмотрим отдельно магнитный дипольный оператор

$$M_{1\mu}^M = \mu_N \sum_{i=1}^A \left\{ g_s(i) \mathbf{s}_i + g_l(i) \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}) \times (\mathbf{p}_i - A^{-1} \mathbf{P}_{\text{ц.м.}}) \right] \right\} (\nabla r Y_{1\mu}(\mathbf{n}_r)) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}} . \quad (2.26)$$

Воспользовавшись равенствами

$$\mathbf{b} \nabla r Y_{1\mu}(\mathbf{n}_r) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} b_{1\mu}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & A^2 \sum_{i=1}^A g_l(i) \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{ц.м.}}) \times (\mathbf{p}_i - A^{-1} \mathbf{P}_{\text{ц.м.}}) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^A (Z + A(A-2) g_l(i)) [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i] + \sum_{i>j=1}^A (Z - A[g_l(i) + g_l(j)]) ([\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_j] + [\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_i]), \end{aligned} \quad (2.28)$$

оператор (2.26) можно представить в виде суммы одно- и двухчастичных операторов, что весьма удобно для вычисления матричных элементов [113]:

$$M_{1\mu}^M = M_{1\mu}^{M,s} + M_{1\mu}^{M,l}, \quad (2.29)$$

$$M_{1\mu}^{M,s} = \sum_{i=1}^A M_{1\mu}^{M,s}(i), \quad (2.30)$$

$$M_{1\mu}^{M,s}(i) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \mu_N g_s(i) s_{1\mu,i}, \quad (2.31)$$

$$M_{1\mu}^{M,l} = M_{1\mu}^{M,l1} + M_{1\mu}^{M,l2} = \sum_{i=1}^A M_{1\mu}^{M,l1}(i) + \sum_{i>j=1}^A M_{1\mu}^{M,l2}(i,j), \quad (2.32)$$

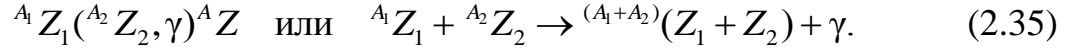
$$M_{1\mu}^{M,l1}(i) = \frac{\mu_N}{2A^2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \{Z + A(A-2) g_l(i)\} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i]_{1\mu}, \quad (2.33)$$

$$M_{1\mu}^{M,l2}(i,j) = \frac{\mu_N}{2A^2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \{Z - A(g_l(i) + g_l(j))\} \{[\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_j]_{1\mu} + [\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_i]_{1\mu}\}. \quad (2.34)$$

Спиновая часть (2.30) оператора (2.29) есть сумма одночастичных операторов (2.31), а орбитальная часть (2.32) – сумма одночастичных (2.33) и двухчастичных (2.34) операторов.

2.4. Сечение радиационного захвата

Реакцией радиационного захвата в столкновении двух ядер ${}^{A_1}Z_1$ и ${}^{A_2}Z_2$ называют процесс, сопровождающийся их слиянием в более тяжелое ядро AZ ($A = A_1 + A_2$, $Z = Z_1 + Z_2$) и испусканием γ -кванта. Схематично такой процесс обозначают



Сечение радиационного захвата сталкивающихся ядер, сопровождающегося переходом системы из парциальной волны с квантовыми числами $J_i^{\pi_i}$, l_i , s_i в связанное состояние конечного ядра с квантовыми числами $J_f^{\pi_f}$ и испусканием γ -кванта, представляет собой отношение вероятности соответствующего процесса в единицу времени к плотности потока в падающей плоской волне. С учетом связи между вероятностью данного процесса и вероятностью (2.7) сечение принимает вид [144, 146]:

$$\begin{aligned} \sigma_{i \rightarrow f}(E_{\text{ц.м.}}, \Lambda I) = & \quad (2.36) \\ = & \frac{8\pi(I+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)(2l_i+1)\hbar I((2I+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2I+1} \left| \left\langle J_f^{\pi_f} \parallel M_I^\Lambda \parallel J_i^{\pi_i} l_i s_i \right\rangle \right|^2. \end{aligned}$$

Данное выражение для сечения получено в длинноволновом приближении (2.1) с учетом малости электромагнитного взаимодействия по сравнению с ядерным и без учета поляризационных эффектов. Кроме того, предполагается, что во входном канале парциальная волна отвечает нормированной на единичную плотность потока вероятности падающей плоской волне. Суммируя выражение (2.36) по всем возможным значениям квантовых чисел системы в начальном и конечном состояниях, получим полное сечение радиационного захвата:

$$\sigma(E_{\text{ц.м.}}) = \sum_{J_i^{\pi_i}, l_i, s_i, \Lambda, I, J_f^{\pi_f}} \sigma_{i \rightarrow f}(E_{\text{ц.м.}}, \Lambda I). \quad (2.37)$$

Из (2.36) видно, что для расчета сечения радиационного захвата необходимы приведенные матричные элементы электромагнитного мультипольного оператора.

Вычисление этих матричных элементов требует знания явного вида волновых функций ядерной A -нуклонной системы в начальном и конечном состояниях. При этом начальное состояние принадлежит непрерывному спектру (состояние рассеяния), а конечное – дискретному (связанное состояние).

Сечение реакции радиационного захвата, как и любой другой реакции, индуцированной заряженными частицами, при подбарьерных энергиях быстро падает с уменьшением энергии и становится экспоненциально малым при низких (астрофизических) значениях энергии. По этой причине в данном диапазоне энергий работать с сечением не очень удобно как в экспериментальных, так и теоретических исследованиях. Более удобной величиной является астрофизический S -фактор, связанный с сечением соотношением [1, 35]:

$$\sigma(E_{\text{ц.м.}}) = \frac{\exp(-2\pi\eta)}{E_{\text{ц.м.}}} S(E_{\text{ц.м.}}) \quad \text{или} \quad \sigma(E_{\text{ц.м.}}) = \frac{\exp\left(-\sqrt{E_G / E_{\text{ц.м.}}}\right)}{E_{\text{ц.м.}}} S(E_{\text{ц.м.}}), \quad (2.38)$$

где

$$E_G = 2mc^2 \left(\frac{\pi e^2 Z_1 Z_2}{\hbar c} \right)^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \quad (2.39)$$

– энергия Гамова сталкивающихся ядер. Фактически, астрофизический S -фактор является величиной, характеризующей чисто ядерный процесс, поскольку из нее явно выделен быстро меняющийся экспоненциальный множитель, обусловленный проницаемостью кулоновского барьера. Для прямых (нерезонансных, периферических) реакций S -фактор имеет более плавную энергетическую зависимость по сравнению с сечением, что делает его более удобным для изучения особенно в области низких и сверхнизких энергий.

Глава 3. Реакция радиационного захвата

${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$

3.1. Общие свойства

Реакция радиационного захвата ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ возникает при столкновении α -частицы (ядра ${}^4\text{He}$) и гелиона h (ядра ${}^3\text{He}$) и сопровождается образованием ядра ${}^7\text{Be}$ с испусканием γ -кванта. Из закона сохранения энергии вытекает следующее соотношение для энергии испускаемого γ -кванта:

$$E_{\gamma} = E_{\text{ц.м.}} + E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)} - E_{\text{возб}}^{(n)}({}^7\text{Be}), \quad (3.1)$$

где $E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)}$ – порог развала ${}^7\text{Be}$ на два кластера $\alpha + h$, $E_{\text{возб}}^{(n)}({}^7\text{Be})$ – энергия возбуждения n -го внутреннего состояния ядра ${}^7\text{Be}$. Используя в качестве величин $E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)}$ и $E_{\text{возб}}^{(n)}({}^7\text{Be})$ их экспериментальные значения [148] (всюду ниже в этом разделе все энергии измеряются в МэВ)

$$E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)} = 1.586, \quad E_{\text{возб}}^{(0)}({}^7\text{Be}) = 0, \quad E_{\text{возб}}^{(1)}({}^7\text{Be}) = 0.429, \quad E_{\text{возб}}^{(2)}({}^7\text{Be}) = 4.57, \quad (3.2)$$

нетрудно получить связь между энергией γ -кванта и энергией относительного движения сталкивающихся ядер. Например, в случае радиационного захвата в системе $\alpha + h$, сопровождающегося образованием ядра ${}^7\text{Be}$ в основном, первом и втором возбужденных состояниях соответственно, имеем:

$$E_{\gamma}^{(0)} = E_{\text{ц.м.}} + 1.586, \quad E_{\gamma}^{(1)} = E_{\text{ц.м.}} + 1.157, \quad E_{\gamma}^{(2)} = E_{\text{ц.м.}} - 2.984, \quad (3.3)$$

где $E_{\gamma}^{(n)}$ – энергия γ -кванта, испускаемого в результате захвата в системе $\alpha + h$ с образованием ядра ${}^7\text{Be}$ в n -ом состоянии. Из (3.3) видно, что захват в системе

$\alpha + h$, сопровождающийся образованием ${}^7\text{Be}$ в основном и первом возбужденном состояниях, возможен при любых энергиях относительного движения, в то время как захват с образованием ${}^7\text{Be}$ во втором возбужденном состоянии возможен только при энергиях, превышающих 2.984 МэВ. Схема реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ изображена на рисунке 3.1.

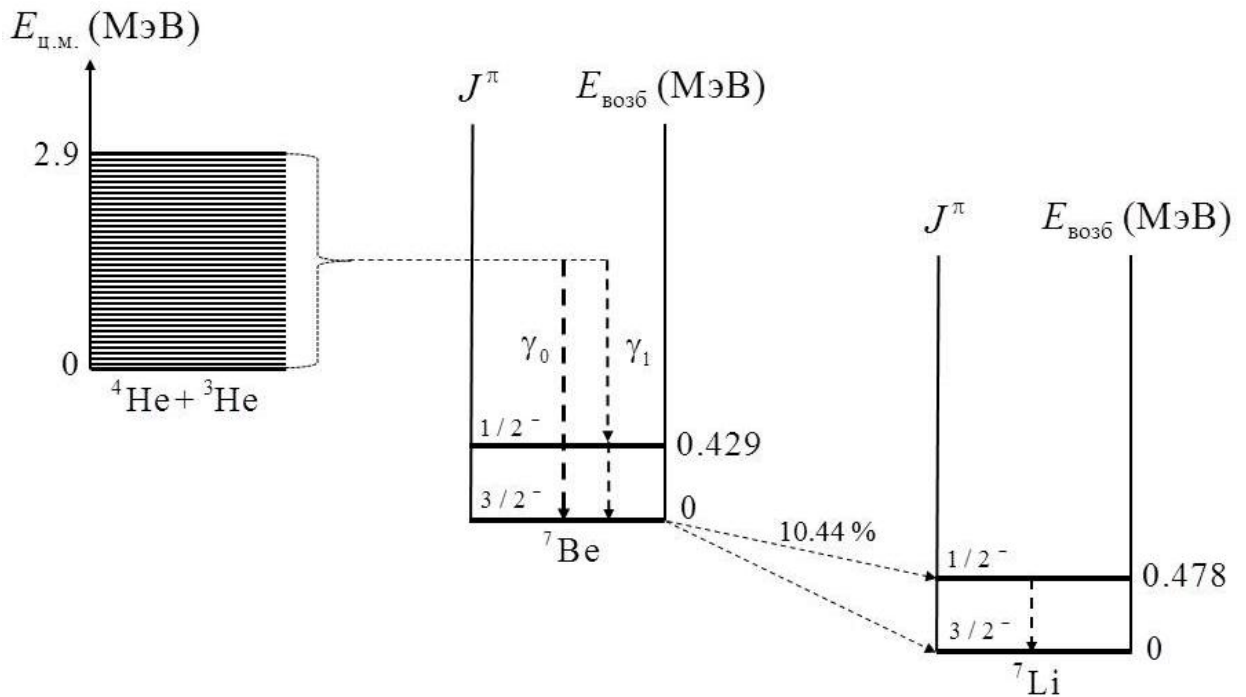


Рисунок 3.1. Схема переходов, сопровождающих реакцию ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и последующий распад ядра ${}^7\text{Be}$.

При энергиях относительного движения $E_{\text{ц.м.}}$ почти вплоть до 3 МэВ доминирующий вклад в полное сечение рассматриваемой реакции дает E1-захват в системе $\alpha + h$, находящейся в S- и D-состояниях рассеяния (состояниях с l равным 0 и 2 соответственно) [77, 98, 106], с последующим образованием ${}^7\text{Be}$ в основном ($J^\pi = 3/2^-$) и первом возбужденном ($J^\pi = 1/2^-$) состояниях. В рамках одноканального варианта АВМРГ эти состояния ${}^7\text{Be}$ трактуются как связанные P-состояния (состояния с $l = 1$) системы $\alpha + h$. Канальный спин s данной системы равен $1/2$ как в начальном, так и конечном состояниях, поскольку кластеры считаются невозбужденными ($s_\alpha = 0$, $s_h = 1/2$). Из правил отбора (2.5) следует, что образование ${}^7\text{Be}$ в основном и первом возбужденном состояниях возможно в результате процесса

радиационного E1-захвата в системе $\alpha + h$, находящейся в состояниях рассеяния с квантовыми числами (J, l) равными $(1/2, 0)$, $(3/2, 2)$, $(5/2, 2)$ и $(1/2, 0)$, $(3/2, 2)$ соответственно.

В соответствии с (2.36) парциальное сечение реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, рассчитываемое в рамках АВМРГ, можно представить следующим образом:

$$\sigma_{i \rightarrow f}(E_{\text{ц.м.}}) = \frac{8\pi}{9\hbar(2l_i + 1)} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c} \right)^3 \left| \sum_{v_i, v_f} C_{J_f^{\pi_f} l_f s v_f}^{(\text{Д})} \left\langle J_f^{\pi_f} l_f s v_f \left\| M_1^E \right\| J_i^{\pi_i} l_i s v_i \right\rangle C_{J_i^{\pi_i} l_i s v_i}^{(\text{H})} \right|^2. \quad (3.4)$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что сечения E1-захвата в системе $\alpha + h$ с образованием ${}^7\text{Be}$ в основном σ_0 и первом возбужденном σ_1 состояниях складываются из сечений (3.4) с квантовыми числами $(J_f, l_f) = (3/2, 1)$, $(J_i, l_i) = (1/2, 0)$, $(3/2, 2)$, $(5/2, 2)$ и $(J_f, l_f) = (1/2, 1)$, $(J_i, l_i) = (1/2, 0)$, $(3/2, 2)$ соответственно. Сумма сечений σ_0 и σ_1 образует полное сечение процесса

$$\sigma(E_{\text{ц.м.}}) = \sigma_0(E_{\text{ц.м.}}) + \sigma_1(E_{\text{ц.м.}}), \quad (3.5)$$

а их отношение называют коэффициентом ветвления реакции:

$$R(E_{\text{ц.м.}}) = \frac{\sigma_1(E_{\text{ц.м.}})}{\sigma_0(E_{\text{ц.м.}})}. \quad (3.6)$$

Парциальные и полный астрофизические S-факторы реакции связаны с соответствующими сечениями соотношением, следующим из (2.38):

$$S(E_{\text{ц.м.}}) = E_{\text{ц.м.}} \exp\left(\sqrt{E_G / E_{\text{ц.м.}}}\right) \sigma(E_{\text{ц.м.}}), \quad (3.7)$$

в котором энергия Гамова $E_G = 27.04$ МэВ для системы $\alpha + h$.

Таким образом, для расчета сечения и астрофизического S-фактора реакции радиационного захвата ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ необходимо знать явное выражение для приведенных матричных элементов электрического дипольного оператора на базисных волновых функциях АВМРГ (1.11) и значения коэффициентов разложения волновых функций начального и конечного состояний, удовлетворяющих системам уравнений АВМРГ для системы $\alpha + h$ в непрерывной (1.31) и дискретной (1.29) областях спектра соответственно, для решения которых требуются матричные элементы гамильтониана.

3.2. Вычисление матричных элементов операторов семикулонной системы в кластерном представлении ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ в базисе АВМРГ

3.2.1. Производящие матричные элементы гамильтониана

Внутренние трансляционно-неинвариантные волновые функции нижайших, допустимых принципом Паули, состояний α - и h -кластеров в обычной осциляторной модели оболочек (осциляторный радиус положим равным единице и выпишем его только в конечных выражениях для матричных элементов) выражаются через антисимметризованные произведения волновых функций одночастичных состояний нуклонов следующим образом:

$$\phi_{s_\alpha=0, \sigma_\alpha=0}^{(\alpha)} = A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \uparrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 |0 p \downarrow\rangle_4 \right\}, \quad (3.8)$$

$$\phi_{s_h=1/2, \sigma_h=1/2}^{(h)} = A \left\{ |0 p \uparrow\rangle_1 |0 n \uparrow\rangle_2 |0 p \downarrow\rangle_3 \right\}, \quad (3.9)$$

$$\phi_{s_h=1/2, \sigma_h=-1/2}^{(h)} = A \left\{ |0 p \uparrow\rangle_1 |0 n \downarrow\rangle_2 |0 p \downarrow\rangle_3 \right\}. \quad (3.10)$$

В функциях (3.8)–(3.10)

$$|0\rangle_i \equiv \exp(-\mathbf{r}_i^2 / 2), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (3.11)$$

– радиальные волновые функции нуклонов, $|n\rangle$, $|p\rangle$ – нейтронная (проекция изоспина $\tau = 1/2$) и протонная (проекция изоспина $\tau = -1/2$) изоспиновые волновые функции нуклона соответственно, $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ спиновые волновые функции нуклона с проекцией спина σ равной $1/2$ и $-1/2$ соответственно.

Функция (1.45) для семикулонной системы в кластерном представлении $\alpha + h$ с учетом явного вида внутренних волновых функций (3.8)–(3.10) для α - и h -кластеров может быть записана в виде:

$$\tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=1/2}^{(\alpha+h)} = A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \uparrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 |0 p \downarrow\rangle_4 |R p \uparrow\rangle_5 |R n \uparrow\rangle_6 |R p \downarrow\rangle_7 \right\}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=-1/2}^{(\alpha+h)} = A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \uparrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 |0 p \downarrow\rangle_4 |\mathbf{R} p \uparrow\rangle_5 |\mathbf{R} n \downarrow\rangle_6 |\mathbf{R} p \downarrow\rangle_7 \right\}, \quad (3.13)$$

где введено обозначение

$$|\mathbf{R}\rangle_i \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}r_i^2 + \mathbf{r}_i \mathbf{R} - \frac{1}{4}R^2\right), \quad i=1, \dots, 7. \quad (3.14)$$

Функции (3.12), (3.13) имеют гауссовскую координатную зависимость, которая в ряде случаев позволяет выполнять аналитические вычисления матричных элементов [149–151]. Обе эти функции в соответствии с (1.61)–(1.64) представимы в виде определителей Слэтера. Свойства определителя делают возможным произвести тождественное преобразование, приводящее их к виду:

$$\tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) = \quad (3.15)$$

$$= A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \uparrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 |0 p \downarrow\rangle_4 |\mathbf{R}-0 p \uparrow\rangle_5 |\mathbf{R}-0 n \uparrow\rangle_6 |\mathbf{R}-0 p \downarrow\rangle_7 \right\},$$

$$\tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=-1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) = \quad (3.16)$$

$$= A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \uparrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 |0 p \downarrow\rangle_4 |\mathbf{R}-0 p \uparrow\rangle_5 |\mathbf{R}-0 n \downarrow\rangle_6 |\mathbf{R}-0 p \downarrow\rangle_7 \right\}.$$

Здесь использовано обозначение:

$$|\mathbf{R}-0\rangle_i \equiv |\mathbf{R}\rangle_i - |0\rangle_i = \exp\left(-\frac{1}{2}r_i^2 + \mathbf{r}_i \mathbf{R} - \frac{1}{4}R^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}r_i^2\right), \quad i=1, \dots, 7. \quad (3.17)$$

Значительным преимуществом функций (3.15), (3.16) перед функциями (3.12), (3.13) является взаимная ортогональность входящих в них функций одночастичных состояний.

Перепишем функции (3.15), (3.16) в следующем виде:

$$\tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_7) = A \left\{ \prod_{i=1}^4 \phi_i(\mathbf{r}_i) \prod_{j=5}^7 \phi_j(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j) \right\}, \quad (3.18)$$

$$\tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=-1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_7) = A \left\{ \prod_{i=1}^4 \varphi_i(\mathbf{r}_i) \prod_{j=5}^7 \varphi_j(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j) \right\}, \quad (3.19)$$

где для одночастичных функций введены обозначения:

$$\phi_1(\mathbf{r}_i) = \varphi_1(\mathbf{r}_i) \equiv |0 n \uparrow\rangle_i, \quad (3.20)$$

$$\phi_2(\mathbf{r}_i) = \varphi_2(\mathbf{r}_i) \equiv |0 p \uparrow\rangle_i,$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(\mathbf{r}_i) &= \varphi_3(\mathbf{r}_i) \equiv |0 \text{ n } \downarrow\rangle_i, \\
\phi_4(\mathbf{r}_i) &= \varphi_4(\mathbf{r}_i) \equiv |0 \text{ p } \downarrow\rangle_i, \\
\phi_5(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) &= \varphi_5(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) \equiv |\mathbf{R} - 0 \text{ p } \uparrow\rangle_i, \\
\phi_6(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) &\equiv |\mathbf{R} - 0 \text{ n } \uparrow\rangle_i, \quad \phi_6(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) \equiv |\mathbf{R} - 0 \text{ n } \downarrow\rangle_i, \\
\phi_7(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) &= \varphi_7(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) \equiv |\mathbf{R} - 0 \text{ p } \downarrow\rangle_i, \\
i &= 1, \dots, 7.
\end{aligned}$$

Далее для упрощения записи среди аргументов функций (3.20) генераторный параметр не пишем. Поскольку функции (3.20) удовлетворяют условию ортогональности (1.65), а гамильтониан (1.18) имеет вид (1.66), то для вычисления матричных элементов входящих в него операторов на функциях (3.18), (3.19) можно воспользоваться формулой (1.67). В результате имеем:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | V | \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle &= \sum_{i>j=1}^7 \left(\langle \phi_i(\mathbf{r}_1) | \langle \phi_j(\mathbf{r}_2) | V(1,2) | \phi_j(\mathbf{r}_2) \rangle | \phi_i(\mathbf{r}_1) \rangle - \right. \\
&\quad \left. - \langle \phi_i(\mathbf{r}_1) | \langle \phi_j(\mathbf{r}_2) | V(1,2) | \phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle | \phi_j(\mathbf{r}_1) \rangle \right) \prod_{l \neq i, j} \langle \phi_l | \phi_l \rangle, \quad (3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=-1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | V | \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=-1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle &= \sum_{i>j=1}^7 \left(\langle \phi_i(\mathbf{r}_1) | \langle \phi_j(\mathbf{r}_2) | V(1,2) | \phi_j(\mathbf{r}_2) \rangle | \phi_i(\mathbf{r}_1) \rangle - \right. \\
&\quad \left. - \langle \phi_i(\mathbf{r}_1) | \langle \phi_j(\mathbf{r}_2) | V(1,2) | \phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle | \phi_j(\mathbf{r}_1) \rangle \right) \prod_{l \neq i, j} \langle \phi_l | \phi_l \rangle, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=-1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | V | \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle &= \sum_{i>j=1}^7 \left(\langle \phi_i(\mathbf{r}_1) | \langle \phi_j(\mathbf{r}_2) | V(1,2) | \phi_j(\mathbf{r}_2) \rangle | \phi_i(\mathbf{r}_1) \rangle - \right. \\
&\quad \left. - \langle \phi_i(\mathbf{r}_1) | \langle \phi_j(\mathbf{r}_2) | V(1,2) | \phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle | \phi_j(\mathbf{r}_1) \rangle \right) \prod_{l \neq i, j} \langle \phi_l | \phi_l \rangle, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | V | \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=-1/2}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle &= \sum_{i>j=1}^7 \left(\langle \phi_i(\mathbf{r}_1) | \langle \phi_j(\mathbf{r}_2) | V(1,2) | \phi_j(\mathbf{r}_2) \rangle | \phi_i(\mathbf{r}_1) \rangle - \right. \\
&\quad \left. - \langle \phi_i(\mathbf{r}_1) | \langle \phi_j(\mathbf{r}_2) | V(1,2) | \phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle | \phi_j(\mathbf{r}_1) \rangle \right) \prod_{l \neq i, j} \langle \phi_l | \phi_l \rangle. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Интегралы перекрытия координатных, спиновых и изоспиновых частей одночастичных функций (3.20) равны:

$$\begin{aligned}
\langle 0|0\rangle &= \pi^{3/2}, & (3.25) \\
\langle \mathbf{Q}-0|\mathbf{R}-0\rangle &= \pi^{3/2} (\exp(\mathbf{QR}/2) - 1), \\
\langle 0|\mathbf{R}-0\rangle &= \langle \mathbf{Q}-0|0\rangle = 0, \\
\langle \uparrow|\uparrow\rangle &= 1, \quad \langle \downarrow|\downarrow\rangle = 1, \quad \langle \uparrow|\downarrow\rangle = 0, \quad \langle \downarrow|\uparrow\rangle = 0, \\
\langle n|n\rangle &= 1, \quad \langle p|p\rangle = 1, \quad \langle n|p\rangle = 0, \quad \langle p|n\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что интеграл перекрытия функций (3.18), (3.19) определяется равенством

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma_f}^{(\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma_i}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle = & (3.26) \\
&= (\langle 0|0\rangle)^4 (\langle \mathbf{Q}-0|\mathbf{R}-0\rangle)^3 \delta_{\sigma_f \sigma_i} = \pi^{21/2} [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^3 \delta_{\sigma_f \sigma_i}.
\end{aligned}$$

Выделяя из (3.26) по формуле (1.48) интеграл перекрытия функций, описывающих движение центра масс системы $\alpha + h$, который в соответствии с (1.47) равен

$$\langle \tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}^{(\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | \tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle = \left(\frac{\pi}{7} \right)^{3/2} \exp(9\mathbf{QR}/14), \quad (3.27)$$

получаем интеграл перекрытия производящих функций, генерирующих трансляционно-инвариантный базис АВМРГ:

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_{s=1/2, \sigma_f}^{(\text{тр.инв.}) (\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | \Phi_{s=1/2, \sigma_i}^{(\text{тр.инв.}) (\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle = \frac{\langle \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma_f}^{(\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | \tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma_i}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle}{\langle \tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}^{(\alpha+h)}(\mathbf{Q}) | \tilde{\Phi}_{\text{ц.м.}}^{(\alpha+h)}(\mathbf{R}) \rangle} = & (3.28) \\
&= 7^{3/2} \pi^9 \exp(-9\mathbf{QR}/14) [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^3 \delta_{\sigma_f \sigma_i}.
\end{aligned}$$

Совершая преобразование (1.50) с константой $C = 7^{3/2} \pi^9$, получим для интеграла перекрытия (3.28) в соответствии с формулой (1.51) окончательный вид:

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \langle \mathbf{Q}, s | \mathbf{R}, s \rangle \delta_{\sigma_f \sigma_i}, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{Q}, s | \mathbf{R}, s \rangle &= \exp(-9\mathbf{QR}/14) [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^3 = & (3.30) \\
&= \exp(6\mathbf{QR}/7) - 3\exp(5\mathbf{QR}/14) + 3\exp(-\mathbf{QR}/7) - \exp(-9\mathbf{QR}/14).
\end{aligned}$$

Из условия (1.57), следующего непосредственно из ортонормированности базисных волновых функций АВМРГ и связывающего величину $\kappa_{\nu s}$ с интегралом перекрытия (3.29), получаем следующее выражение для $\kappa_{\nu s}$:

$$\kappa_{\nu ls}^2 = \Sigma_{1\nu} \varepsilon_\nu^l, \quad (3.31)$$

в котором

$$\Sigma_{1\nu} = \frac{2\pi}{\nu!} \left[\left(\frac{6}{7} \right)^\nu - 3 \left(\frac{5}{14} \right)^\nu + 3 \left(-\frac{1}{7} \right)^\nu - \left(-\frac{9}{14} \right)^\nu \right], \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_\nu^l = \int_{-1}^1 t^\nu P_l(t) dt = \begin{cases} \frac{2^{l+1} \nu! [(\nu + l) / 2]!}{[\nu + l + 1]! [(\nu - l) / 2]!}, & l \leq \nu, l + \nu - \text{четное}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $\nu < 3$ константа (3.31) обращается в нуль. Это соответствует тому, что такие состояния являются запрещенными принципом Паули.

Перейдем непосредственно к вычислению матричных элементов операторов (1.19), (1.20), (1.25)–(1.27), образующих гамильтониан (1.18), на производящих функциях (1.37). Для этого воспользуемся формулами (3.21)–(3.24), (3.27) и (1.48), (1.51) с константой $C = 7^{3/2} \pi^9$. При расчетах по формулам (3.21)–(3.24) возникают следующие произведения:

$$\Pi_1 = (\langle 0|0 \rangle)^2 (\langle \mathbf{Q} - 0 | \mathbf{R} - 0 \rangle)^3 = \pi^{15/2} [\exp(\mathbf{QR} / 2) - 1]^3, \quad (3.33)$$

$$\Pi_2 = (\langle 0|0 \rangle)^3 (\langle \mathbf{Q} - 0 | \mathbf{R} - 0 \rangle)^2 = \pi^{15/2} [\exp(\mathbf{QR} / 2) - 1]^2,$$

$$\Pi_3 = (\langle 0|0 \rangle)^4 (\langle \mathbf{Q} - 0 | \mathbf{R} - 0 \rangle) = \pi^{15/2} [\exp(\mathbf{QR} / 2) - 1].$$

В результате производящие матричные элементы оператора кинетической энергии (1.19) примут вид:

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | T - T_{\text{ц.м.}} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(9 - \frac{3}{7} \mathbf{Q}^2 - \frac{3}{7} \mathbf{R}^2 + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \langle \mathbf{Q} | \mathbf{R} \rangle \delta_{\sigma_f \sigma_i}. \quad (3.34)$$

Производящие матричные элементы оператора кулоновского взаимодействия (1.20) определяются выражением:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | V_{\text{кул}} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{r_0} [\langle \mathbf{Q} | \mathbf{R} \rangle + \\ &+ \exp(-9\mathbf{QR} / 14) \int_0^1 (2U^{(+)} \nu^2 - U^{(-)} \nu^2 - 2U^{(0)} \nu^2 - \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$-3U^{(+)}\nu + 3U^{(-)}\nu + 2U^{(0)}\nu + U^{(+)} - 2U^{(-)}d(\sqrt{\zeta}) \Big] \delta_{\sigma_f \sigma_i},$$

где

$$U^{(+)} = \exp\left(-\frac{(\mathbf{R} + \mathbf{Q})^2}{8}\zeta + \frac{\mathbf{RQ}}{2}\right), \quad (3.36)$$

$$U^{(-)} = \exp\left(-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{Q})^2}{8}\zeta\right),$$

$$U^{(0)} = U_Q + U_R - 1,$$

$$U_Q = U^{(+)}\Big|_{R=0} = U^{(-)}\Big|_{R=0} = \exp\left(-\frac{\mathbf{Q}^2}{8}\zeta\right),$$

$$U_R = U^{(+)}\Big|_{Q=0} = U^{(-)}\Big|_{Q=0} = \exp\left(-\frac{\mathbf{R}^2}{8}\zeta\right),$$

$$\nu = \exp(\mathbf{QR} / 2).$$

Производящие матричные элементы оператора центрального обменного взаимодействия (1.25) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | V_{\text{ц}} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle &= (\varepsilon_{\text{ц}}^{(\alpha)} + \varepsilon_{\text{ц}}^{(\text{h})}) \langle \mathbf{Q} | \mathbf{R} \rangle \delta_{\sigma_f \sigma_i} + \quad (3.37) \\ &+ 3 \sum_{n=1}^3 \left(\frac{a_{\text{ц},n}}{a_{\text{ц},n} + 2r_0^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{9\mathbf{QR}}{14}\right) \left[(4\alpha_{\text{ц},n} + 2\beta_{\text{ц},n} + 2\gamma_{\text{ц},n} + \delta_{\text{ц},n}) U_{\text{ц},n}^{(+)} (\nu - 1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\alpha_{\text{ц},n} + 2\beta_{\text{ц},n} + 2\gamma_{\text{ц},n} + 4\delta_{\text{ц},n}) U_{\text{ц},n}^{(-)} (\nu - 1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\alpha_{\text{ц},n} - \delta_{\text{ц},n}) U_{\text{ц},n}^{(0)} (5\nu^2 - 6\nu + 1) + 2(\alpha_{\text{ц},n} - \delta_{\text{ц},n}) (U_{\text{ц},n}^{(+)} + U_{\text{ц},n}^{(-)}) (\nu - 1) \right] \delta_{\sigma_f \sigma_i}, \end{aligned}$$

где

$$U_{\text{ц},n}^{(+)} = U^{(+)}\left(\zeta = 2r_0^2 / (2r_0^2 + a_{\text{ц},n})\right), \quad (3.38)$$

$$U_{\text{ц},n}^{(-)} = U^{(-)}\left(\zeta = 2r_0^2 / (2r_0^2 + a_{\text{ц},n})\right),$$

$$U_{\text{ц},n}^{(0)} = U^{(0)}\left(\zeta = 2r_0^2 / (2r_0^2 + a_{\text{ц},n})\right),$$

$\varepsilon_{\text{ц}}^{(\alpha)}$, $\varepsilon_{\text{ц}}^{(\text{h})}$ – вклады во внутреннюю энергию α - и h -кластеров соответственно от центрального обменного нуклон-нуклонного взаимодействия:

$$\varepsilon_{\text{ц}}^{(\alpha)} = 2\varepsilon_{\text{ц}}^{(\text{h})}, \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{\text{ц}}^{(\text{h})} = 3 \sum_{n=1}^3 \left(\frac{a_{\text{ц},n}}{2r_0^2 + a_{\text{ц},n}} \right)^{3/2} (\alpha_{\text{ц},n} - \delta_{\text{ц},n}). \quad (3.40)$$

При этом внутренние энергии этих кластеров имеют вид:

$$\varepsilon^{(\text{a})} = \frac{9\hbar^2}{4mr_0^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{r_0} + \varepsilon_{\text{ц}}^{(\text{a})}, \quad (3.41)$$

$$\varepsilon^{(\text{h})} = \frac{3\hbar^2}{2mr_0^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{r_0} + \varepsilon_{\text{ц}}^{(\text{h})}. \quad (3.42)$$

Вместо производящих матричных элементов оператора спин-орбитального взаимодействия (1.26) приведем здесь выражение для величины $I_{i \rightarrow f}(Q, R)$ (1.60), записанной в виде (1.94), позволяющем для вычисления матричных элементов (1.59) данного оператора на базисных волновых функциях АВМРГ использовать технику рекуррентных соотношений, применяемую для вычисления матричных элементов оператора центрального взаимодействия:

$$I_{i \rightarrow f}(Q, R) = 14\pi \sum_{n=1}^2 (2r_0^2 + a_{ls,n}) \left(J(J+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \left(\frac{a_{ls,n}}{2r_0^2 + a_{ls,n}} \right)^{5/2} \times \quad (3.43)$$

$$\times \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{9QR}{14}\right) \left[\frac{2\alpha_{ls,n} + \gamma_{ls,n}}{17r_0^2 + 12a_{ls,n}} U_{ls,n}^{(+)} \nu^2 + \frac{\alpha_{ls,n} + 2\gamma_{ls,n}}{17r_0^2 + 5a_{ls,n}} U_{ls,n}^{(-)} \nu^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2(\alpha_{ls,n} + 2\gamma_{ls,n})}{3r_0^2 + 5a_{ls,n}} U_{ls,n}^{(+)} \nu - \frac{2(2\alpha_{ls,n} + \gamma_{ls,n})}{3r_0^2 - 2a_{ls,n}} U_{ls,n}^{(-)} \nu - \right.$$

$$\left. - \frac{3\gamma_{ls,n}}{11r_0^2 + 2a_{ls,n}} U_{ls,n}^{(+)} - \frac{3\alpha_{ls,n}}{11r_0^2 + 9a_{ls,n}} U_{ls,n}^{(-)} \right\} P_l(t) dt \delta_{l_f l_i},$$

где

$$U_{ls,n}^{(0)} = U^{(0)}(\zeta = 2r_0^2 / (2r_0^2 + a_{ls,n})), \quad (3.44)$$

$$U_{ls,n}^{(+)} = U^{(+)}(\zeta = 2r_0^2 / (2r_0^2 + a_{ls,n})),$$

$$U_{ls,n}^{(-)} = U^{(-)}(\zeta = 2r_0^2 / (2r_0^2 + a_{ls,n})).$$

Производящие матричные элементы оператора тензорного взаимодействия для семинуклонной системы в кластерном представлении $\alpha + \text{h}$ равны нулю, поскольку

ку начальное и конечное состояния данной системы имеют одинаковый канальный спин s равный $1/2$.

3.2.2. Матричные элементы электрического дипольного оператора

Электрический дипольный оператор определяется выражением (2.12). Представление этого оператора в виде (2.20) позволяет использовать для вычисления его производящих матричных элементов формулу (1.67). Учитывая значения произведений (3.33) и следующих двухчастичных изоспиновых матричных элементов:

$$\begin{aligned}\langle p_1 p_2 | g_l(1) - g_l(2) | p_2 p_1 \rangle &= 0, \\ \langle p_1 n_2 | g_l(1) - g_l(2) | n_2 p_1 \rangle &= 1, \\ \langle n_1 p_2 | g_l(1) - g_l(2) | p_2 n_1 \rangle &= -1, \\ \langle n_1 n_2 | g_l(1) - g_l(2) | n_2 n_1 \rangle &= 0, \\ \langle p_1 n_2 | g_l(1) - g_l(2) | p_2 n_1 \rangle &= 0, \\ \langle n_1 p_2 | g_l(1) - g_l(2) | n_2 p_1 \rangle &= 0,\end{aligned}\tag{3.45}$$

в которых введено обозначение $|a_k b_j\rangle \equiv |a\rangle_k |b\rangle_j$, получаем выражение для матричных элементов электрического дипольного оператора (2.20) на функциях (3.18), (3.19):

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Phi}_{s\sigma_f}(\mathbf{Q}) | M_{1\mu}^E | \tilde{\Phi}_{s\sigma_i}(\mathbf{R}) \rangle &= \\ &= er_0 \frac{\pi^{21/2}}{7} [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^3 (QY_{1\mu}(\mathbf{n}_Q) + RY_{1\mu}(\mathbf{n}_R)) \delta_{\sigma_f \sigma_i}.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Матричные элементы на производящих функциях, генерирующих трансляционно-инвариантный базис АВМРГ, выражаются через матричные элементы (3.46) по формулам (1.48) и (1.51) с константой $C = 7^{3/2} \pi^9$ [113]:

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^E | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \frac{er_0}{7} [QY_{1\mu}(\mathbf{n}_Q) + RY_{1\mu}(\mathbf{n}_R)] \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle.\tag{3.47}$$

Полученное выражение можно также переписать в виде:

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^E | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \frac{er_0}{14} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [R_{1\mu} + Q_{1\mu}] \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle, \quad (3.48)$$

где использована связь [122]

$$Q_{1\mu} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Q Y_{1\mu}(\mathbf{n}_Q), \quad R_{1\mu} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} R Y_{1\mu}(\mathbf{n}_R) \quad (3.49)$$

между циклическими компонентами (1.77) векторов \mathbf{Q} , \mathbf{R} и компонентами соответствующих сферических функций.

Матричные элементы электрического дипольного оператора (2.20) на ортонормированных базисных волновых функциях АВМРГ (1.13) связаны с соответствующими производящими матричными элементами соотношением (1.52). Подставляя в него выражение (3.47) и используя при этом разложение Клебша–Гордана [122]

$$Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) = \sum_{L, M} \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(L + 1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{L 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{L M} Y_{L M}(\theta, \varphi), \quad (3.50)$$

разложение экспоненты

$$\exp(\beta \mathbf{Q} \mathbf{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta \mathbf{Q} \mathbf{R})^n}{n!} t^n, \quad t = \cos \theta_{\mathbf{Q} \mathbf{R}}, \quad (3.51)$$

разложение степенной функции [152]

$$t^n = \sum_{l=0}^n \frac{2l + 1}{2} \varepsilon_n^l P_l(t), \quad (3.52)$$

теорему сложения для полиномов Лежандра в терминах сферических функций (1.55), получаем для матричных элементов электрического дипольного оператора семинуклонной системы в кластерном представлении $\alpha + \mathbf{h}$ на базисных волновых функциях АВМРГ (1.13) следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle l_f m_f s \sigma_f \nu_f | M_{1\mu}^E | l_i m_i s \sigma_i \nu_i \rangle &= \frac{er_0}{14} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{2l_i + 1}{2l_f + 1}} \frac{\kappa_{\nu_i - 1, l_f s}}{\kappa_{\nu_i, l_i s}} C_{l_i 0 10}^{l_f 0} C_{l_i m_i 1\mu}^{l_f m_f} \delta_{\nu_f, \nu_i - 1} + (-1)^\mu \sqrt{\frac{2l_f + 1}{2l_i + 1}} \frac{\kappa_{\nu_f - 1, l_i s}}{\kappa_{\nu_f, l_f s}} C_{l_f 0 10}^{l_i 0} C_{l_f m_f 1 - \mu}^{l_i m_i} \delta_{\nu_i, \nu_f - 1} \right) \delta_{\sigma_f \sigma_i}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Величина коэффициента Клебша–Гордана $C_{a 0 b 0}^{c 0}$ для четной суммы $a + b + c = 2g$

(g – целое число) может быть вычислена по формуле [122]

$$C_{a^0 b^0}^{c^0} = \frac{(-1)^{g-c} g! \sqrt{2c+1}}{(g-a)!(g-b)!(g-c)!} \left[\frac{(2g-2a)!(2g-2b)!(2g-2c)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}. \quad (3.54)$$

Для нечетной суммы $a + b + c$ коэффициент Клебша–Гордана $C_{a^0 b^0}^{c^0}$ зануляется. Отсюда, в частности, следует, что в случае равенства значений орбитальных моментов l_i и l_f матричный элемент (3.53) обращается в нуль.

Из общего вида оператора $M_{1\mu}^E$ следует свойство симметрии для его матричных элементов:

$$\langle f | M_{1\mu}^E | i \rangle = (-1)^\mu \langle i | M_{1-\mu}^E | f \rangle. \quad (3.55)$$

Это же свойство следует непосредственно из (3.53) с учетом свойств симметрии коэффициентов Клебша–Гордана [122]:

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{b+\beta} \sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}} C_{c-\gamma b\beta}^{a-\alpha}, \quad (3.56)$$

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a+b-c} C_{a-\alpha b-\beta}^{c-\gamma}.$$

С помощью (3.56) матричный элемент (3.53) можно свести к виду:

$$\langle l_f m_f s \sigma_f \nu_f | M_{1\mu}^E | l_i m_i s \sigma_i \nu_i \rangle = \frac{er_0}{14} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \bar{\Omega}_1(1; (i), (f)) C_{l_i m_i 1\mu}^{l_f m_f} \delta_{\sigma_f \sigma_i}, \quad (3.57)$$

где введены обозначения:

$$\bar{\Omega}_1(1; (i), (f)) = \sqrt{\frac{2l_i+1}{2l_f+1}} C_{l_i 0 10}^{l_f 0} \left(\frac{\kappa_{\nu_f l_f}}{\kappa_{\nu_i l_i}} \delta_{\nu_f, \nu_i-1} + \frac{\kappa_{\nu_i l_i}}{\kappa_{\nu_f l_f}} \delta_{\nu_f, \nu_i+1} \right), \quad (3.58)$$

$(i), (f)$ – совокупности квантовых чисел J^π, l, s, ν в начальном и конечном состояниях соответственно. Матричный элемент (3.57) удовлетворяет теореме Вигнера–Эккарта (2.4)

$$\langle l_f m_f s \sigma_f \nu_f | M_{1\mu}^E | l_i m_i s \sigma_i \nu_i \rangle = \frac{\langle l_f s \nu_f || M_1^E || l_i s \nu_i \rangle}{\sqrt{2l_f+1}} C_{l_i m_i 1\mu}^{l_f m_f} \delta_{\sigma_f \sigma_i} \quad (3.59)$$

с приведенным матричным элементом, определяемым выражением:

$$\langle l_f s \nu_f || M_1^E || l_i s \nu_i \rangle = \frac{er_0}{14} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (2l_f+1) \bar{\Omega}_1(1; (i), (f)). \quad (3.60)$$

Переходя по формуле (1.58) от матричных элементов в базисе АВМРГ (1.13) к матричным элементам в базисе АВМРГ (1.11) и используя при этом выражение для суммы произведения трех коэффициентов Клебша–Гордана [122]

$$\sum_{\alpha\beta\delta} C_{a\alpha}^{c\gamma} C_{d\delta}^{e\epsilon} C_{a\alpha}^{d\delta} C_{f\varphi} = (-1)^{b+c+d+f} \sqrt{(2c+1)(2d+1)} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix} C_{c\gamma}^{e\epsilon} C_{f\varphi}, \quad (3.61)$$

которое применительно к рассматриваемому случаю записывается в виде

$$\sum_{m_i, \sigma_i, m_f} C_{l_i m_i}^{J_i M_i} C_{l_f m_f}^{J_f M_f} C_{l_i m_i}^{l_f m_f} = (-1)^{J_i+l_f+s+1} \sqrt{(2J_i+1)(2l_f+1)} \begin{Bmatrix} l_i & s & J_i \\ J_f & 1 & l_f \end{Bmatrix} C_{J_i M_i}^{J_f M_f} C_{l_i m_i}^{1\mu}, \quad (3.62)$$

получим [113]:

$$\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f | M_{1\mu}^E | J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \rangle = (-1)^{J_i+l_f+s+1} \frac{er_0}{14} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \Omega_1(1; (i), (f)) C_{J_i M_i}^{J_f M_f} C_{l_i m_i}^{1\mu}. \quad (3.63)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Omega_1(1; (i), (f)) = \Pi_{J_i l_i} C_{l_i 0 10}^{l_f 0} \begin{Bmatrix} l_i & s & J_i \\ J_f & 1 & l_f \end{Bmatrix} \left(\frac{\kappa_{v_f l_f}}{\kappa_{v_i l_i}} \delta_{v_f, v_i-1} + \frac{\kappa_{v_i l_i}}{\kappa_{v_f l_f}} \delta_{v_f, v_i+1} \right), \quad (3.64)$$

$$\Pi_{J_i l_i} = \sqrt{(2J_i+1)(2l_i+1)}.$$

Очевидно, что для матричного элемента (3.63) выполнена теорема Вигнера–Эккарта (2.4)

$$\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f | M_{1\mu}^E | J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \rangle = \frac{\langle J_f^{\pi_f} l_f s v_f || M_1^E || J_i^{\pi_i} l_i s v_i \rangle}{\sqrt{2J_f+1}} C_{J_i M_i}^{J_f M_f} \quad (3.65)$$

с приведенным матричным элементом

$$\langle J_f^{\pi_f} l_f s v_f || M_1^E || J_i^{\pi_i} l_i s v_i \rangle = (-1)^{J_i+l_f+s+1} \frac{er_0}{14} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (2J_f+1) \Omega_1(1; (i), (f)). \quad (3.66)$$

Общее свойство (3.55) легко усматривается для матричных элементов (3.63) при учете свойства симметрии 6j-символов [122]

$$\begin{Bmatrix} l_i & s & J_i \\ J_f & 1 & l_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_f & s & J_f \\ J_i & 1 & l_i \end{Bmatrix}, \quad (3.67)$$

а также свойств симметрии для коэффициентов Клебша–Гордана (3.56).

Приведенные матричные элементы (3.60) и (3.66) электрического дипольного

оператора связаны между собой довольно простым соотношением:

$$\begin{aligned} & \left\langle J_f^{\pi_f} l_f s \nu_f \left\| M_1^E \right\| J_i^{\pi_i} l_i s \nu_i \right\rangle = \\ & = (-1)^{J_i + l_f + s + 1} \sqrt{(2J_i + 1)(2J_f + 1)} \begin{Bmatrix} l_i & s & J_i \\ J_f & 1 & l_f \end{Bmatrix} \left\langle l_f s \nu_f \left\| M_1^E \right\| l_i s \nu_i \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.68)$$

которое непосредственно вытекает из явных выражений для этих приведенных матричных элементов.

3.2.3. Матричные элементы электрического квадрупольного оператора

При вычислении матричных элементов электрического квадрупольного оператора (2.22) для системы $\alpha + h$ по формулам (3.21)–(3.24) используем значения двухчастичных изоспиновых матричных элементов:

$$\begin{aligned} & \langle p_1 p_2 | 7[g_l(1) + g_l(2)] - 4 | p_2 p_1 \rangle = 10, \\ & \langle p_1 n_2 | 7[g_l(1) + g_l(2)] - 4 | n_2 p_1 \rangle = 3, \\ & \langle n_1 p_2 | 7[g_l(1) + g_l(2)] - 4 | p_2 n_1 \rangle = 3, \\ & \langle n_1 n_2 | 7[g_l(1) + g_l(2)] - 4 | n_2 n_1 \rangle = -4, \\ & \langle p_1 n_2 | 7[g_l(1) + g_l(2)] - 4 | p_2 n_1 \rangle = 0, \\ & \langle n_1 p_2 | 7[g_l(1) + g_l(2)] - 4 | n_2 p_1 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

значения произведений (3.33) и выражение для сферических функций [123, 153]

$$\begin{aligned} & |\alpha \mathbf{R} + \beta \mathbf{Q}|^l Y_{lm}(\mathbf{n}_{\alpha \mathbf{R} + \beta \mathbf{Q}}) = \\ & = \sum_{\lambda, m_\lambda} \sqrt{\frac{4\pi(2l+1)!}{(2\lambda+1)!(2l-2\lambda+1)!}} (\alpha R)^{l-\lambda} (\beta Q)^\lambda C_{l-\lambda, m-\lambda, \lambda, m_\lambda}^{lm} Y_{l-\lambda, m-\lambda}(\mathbf{n}_R) Y_{\lambda, m_\lambda}(\mathbf{n}_Q), \end{aligned} \quad (3.70)$$

из которого следует равенство

$$|\mathbf{R} + \mathbf{Q}|^2 Y_{2m}(\mathbf{n}_{\mathbf{R} + \mathbf{Q}}) + |\mathbf{R} - \mathbf{Q}|^2 Y_{2m}(\mathbf{n}_{\mathbf{R} - \mathbf{Q}}) = 2R^2 Y_{2m}(\mathbf{n}_R) + 2Q^2 Y_{2m}(\mathbf{n}_Q). \quad (3.71)$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \left\langle \tilde{\Phi}_{s\sigma_f}(\mathbf{Q}) \left\| M_{2\mu}^E \right\| \tilde{\Phi}_{s\sigma_i}(\mathbf{R}) \right\rangle = \pi^{21/2} \frac{er_0^2}{98} \left[\exp(\mathbf{QR} / 2) - 1 \right]^2 \times \\ & \times \left(25[\exp(\mathbf{QR} / 2) - 1](\mathbf{Q} + \mathbf{R})^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q} + \mathbf{R}}) + \right. \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$+49[(\mathbf{Q} + \mathbf{R})^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}+\mathbf{R}}) - Q^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}}) - R^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{R}})] \delta_{\sigma_f \sigma_i}.$$

В свою очередь, с учетом формул (3.27), (1.48) и (1.51) с тем же значением константы C , что и при вычислении матричных элементов гамильтониана и электрического дипольного оператора, матричные элементы на производящих функциях, генерирующих трансляционно-инвариантный базис АВМРГ, имеют вид [113]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{2\mu}^E | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle &= \frac{er_0^2}{98} \left\{ 25(\mathbf{Q} + \mathbf{R})^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}+\mathbf{R}}) + \right. \\ &+ 49 \frac{(\mathbf{Q} + \mathbf{R})^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}+\mathbf{R}}) - Q^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}}) - R^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{R}})}{\exp(\mathbf{QR}/2) - 1} \left. \right\} \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Используя разложение в ряд интеграла перекрытия этих производящих функций

$$\langle \mathbf{Q}, s | \mathbf{R}, s \rangle = \sum_{vlm} \kappa_{vls}^2 Q^v R^v Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_{\mathbf{R}}) \quad (3.74)$$

и экспоненты

$$\exp(\beta \mathbf{QR}) = \sum_{vlm} c_{vl}^2 Q^v R^v Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_{\mathbf{R}}), \quad c_{vl}^2 = \frac{2\pi \varepsilon_v^l}{v!} \beta^v, \quad (3.75)$$

значение интеграла по полному телесному углу от произведения трех сферических функций [122]

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) Y_{l_3 m_3}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{l_3 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_3 m_3}, \quad (3.76)$$

значение суммы произведения трех коэффициентов Клебша–Гордана (3.61), явные выражения для б j -символов [122]

$$\left\{ \begin{matrix} 0 & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} = (-1)^{b+e+d} \frac{\delta_{bc} \delta_{ef}}{\sqrt{(2b+1)(2e+1)}}, \quad (3.77)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & 0 \\ d & e & f \end{matrix} \right\} = (-1)^{a+e+f} \frac{\delta_{ab} \delta_{de}}{\sqrt{(2a+1)(2d+1)}},$$

равенство

$$\left. \frac{\partial^{v_1}}{\partial Q^{v_1}} \frac{\partial^{v_2}}{\partial R^{v_2}} Q^\alpha R^\beta \right|_{Q=R=0} = v_1! v_2! \delta_{v_1 \alpha} \delta_{v_2 \beta}, \quad (3.78)$$

а также свойства симметрии коэффициентов Клебша–Гордана [122]

$$C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a+b-c} C_{b\beta a\alpha}^{c\gamma} \quad (3.79)$$

и (3.56), получаем из соотношения (1.52), воспользовавшись производящими матричными элементами (3.73), выражение для матричных элементов электрического квадрупольного оператора семинуклонной системы в кластерном представлении $\alpha + \mathbf{h}$ на базисных волновых функциях АВМРГ (1.13):

$$\begin{aligned} & \langle l_f m_f s \sigma_f \nu_f | M_{2\mu}^E | l_i m_i s \sigma_i \nu_i \rangle = \\ & = \frac{er_0^2}{196} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left\{ 25 \bar{\Omega}_1(2; (i), (f)) - \sqrt{30} \left[25 \Sigma_{1, \nu_f - 1} + 49 \Sigma_{2, \nu_f - 1} \right] \bar{\Omega}_2(2; (i), (f)) \right\} C_{l_i m_i 2\mu}^{l_f m_f} \delta_{\sigma_f \sigma_i}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

со следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1(2; (i), (f)) &= \sqrt{\frac{2l_i + 1}{2l_f + 1}} C_{l_i 0 20}^{l_f 0} \left(\frac{\kappa_{\nu_f l_f}}{\kappa_{\nu_i l_i}} \delta_{\nu_f, \nu_i - 2} + \frac{\kappa_{\nu_i l_i}}{\kappa_{\nu_f l_f}} \delta_{\nu_f, \nu_i + 2} \right), \\ \bar{\Omega}_2(2; (i), (f)) &= \sqrt{2l_i + 1} \delta_{\nu_f \nu_i} \sum_l C_{l_f 0 10}^{l 0} C_{l_i 0 10}^{l 0} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ l_f & l & l_i \end{matrix} \right\} \frac{\varepsilon_{\nu_f - 1}^l}{\kappa_{\nu_f l_f} \kappa_{\nu_i l_i}}, \\ \Sigma_{2\nu} &= \frac{2\pi}{\nu!} \left[\left(\frac{5}{14} \right)^\nu - 2 \left(-\frac{1}{7} \right)^\nu + \left(-\frac{9}{14} \right)^\nu \right]. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Приведенный матричный элемент, отвечающий выражению (3.80), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \langle l_f s \nu_f | M_{2\mu}^E | l_i s \nu_i \rangle = \\ & = \frac{er_0^2}{196} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (2l_f + 1) \left\{ 25 \bar{\Omega}_1(2; (i), (f)) - \sqrt{30} \left[25 \Sigma_{1, \nu_f - 1} + 49 \Sigma_{2, \nu_f - 1} \right] \bar{\Omega}_2(2; (i), (f)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Выражение для матричных элементов электрического квадрупольного оператора в базисе АВМРГ (1.11), полученное посредством соотношения (1.58), и соответствующее ему на основании теоремы Вигнера–Эккарта (2.4) выражение для приведенных матричных элементов записываются следующим образом [113]:

$$\begin{aligned} & \langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s \nu_f | M_{2\mu}^E | J_i^{\pi_i} M_i l_i s \nu_i \rangle = (-1)^{J_i + l_f + s} \frac{er_0^2}{196} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \times \\ & \times \left\{ 25 \Omega_1(2; (i), (f)) - \sqrt{30} \left[25 \Sigma_{1, \nu_f - 1} + 49 \Sigma_{2, \nu_f - 1} \right] \Omega_2(2; (i), (f)) \right\} C_{J_i M_i 2\mu}^{J_f M_f}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \left\langle J_f^{\pi_f} l_f s v_f \left\| M_2^E \right\| J_i^{\pi_i} l_i s v_i \right\rangle &= (-1)^{J_i + l_f + s} \frac{e r_0^2}{196} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (2J_f + 1) \times \\ &\times \left\{ 25 \Omega_1(2; (i), (f)) - \sqrt{30} \left[25 \Sigma_{1, v_f - 1} + 49 \Sigma_{2, v_f - 1} \right] \Omega_2(2; (i), (f)) \right\}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1(2; (i), (f)) &= \Pi_{J_i l_i} C_{l_i 0 20}^{l_f 0} \left\{ \begin{matrix} l_i & s & J_i \\ J_f & 2 & l_f \end{matrix} \right\} \left(\frac{\kappa_{v_f l_f}}{\kappa_{v_i l_i}} \delta_{v_f, v_i - 2} + \frac{\kappa_{v_i l_i}}{\kappa_{v_f l_f}} \delta_{v_f, v_i + 2} \right), \\ \Omega_2(2; (i), (f)) &= \Pi_{J_i l_i l_f} \delta_{v_f v_i} \left\{ \begin{matrix} l_i & s & J_i \\ J_f & 2 & l_f \end{matrix} \right\} \sum_l C_{l_f 0 10}^{l 0} C_{l_i 0 10}^{l 0} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ l_f & l & l_i \end{matrix} \right\} \frac{\varepsilon_{v_f - 1}^l}{\kappa_{v_f l_f} \kappa_{v_i l_i}}, \\ \Pi_{J_i l_i l_f} &= \sqrt{(2J_i + 1)(2l_i + 1)(2l_f + 1)}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

В отличие от выражений для матричных элементов электрического дипольного оператора (3.63), (3.66), выражения для матричных элементов электрического квадрупольного оператора (3.83), (3.84) представляют собой сумму двух слагаемых, одно из которых является диагональным по числу осцилляторных квантов.

3.2.4. Матричные элементы магнитного дипольного оператора

Матричные элементы циклических компонент $s_{1\mu}$ оператора спина на базисных спиновых функциях $\chi_{s\sigma}$, $\sigma = -s, \dots, s - 1, s$, определяются выражением [122]:

$$\langle \chi_{s\bar{\sigma}} | s_{1\mu} | \chi_{s\sigma} \rangle = \sqrt{s(s+1)} C_{s\sigma 1\mu}^{s\bar{\sigma}}. \quad (3.86)$$

Из (3.86) следует, что отличными от нуля являются следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} \langle \chi_{s\sigma} | s_{10} | \chi_{s\sigma} \rangle &= \sigma, \\ \langle \chi_{s\sigma \pm 1} | s_{1, \pm 1} | \chi_{s\sigma} \rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(s \mp \sigma)(s \pm \sigma + 1)}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Учитывая также значения одночастичных изоспиновых матричных элементов

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} | g_s | \mathbf{p} \rangle &= g_p, & \langle \mathbf{n} | g_s | \mathbf{n} \rangle &= g_n, \\ \langle \mathbf{p} | g_s | \mathbf{n} \rangle &= 0, & \langle \mathbf{n} | g_s | \mathbf{p} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.88)$$

и произведений

$$\tilde{\Pi}_1 = (\langle 0|0\rangle)^3 (\langle \mathbf{Q}-0|\mathbf{R}-0\rangle)^3 = \pi^9 [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^3, \quad (3.89)$$

$$\tilde{\Pi}_2 = (\langle 0|0\rangle)^4 (\langle \mathbf{Q}-0|\mathbf{R}-0\rangle)^2 = \pi^9 [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^2,$$

можно с использованием формулы (1.69) получить матричные элементы спиновой части магнитного дипольного оператора (2.30) на функциях (3.18), (3.19) для семинуклонной системы в кластерном представлении $\alpha + h$:

$$\langle \tilde{\Phi}_{s\sigma_f}(\mathbf{Q}) | M_{1\mu}^{M,s} | \tilde{\Phi}_{s\sigma_i}(\mathbf{R}) \rangle = \pi^{10} \frac{\mu_N g_n}{2} \sqrt{3s(s+1)} C_{s\sigma_i 1\mu}^{s\sigma_f} [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^3, \quad (3.90)$$

из которых с учетом (1.48) и (1.51) с константой $C = 7^{3/2} \pi^9$ следуют матричные элементы на производящих функциях, генерирующих трансляционно-инвариантный базис АВМРГ [113]:

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^{M,s} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \frac{\mu_N g_n}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi} s(s+1)} C_{s\sigma_i 1\mu}^{s\sigma_f} \langle \mathbf{Q}, s | \mathbf{R}, s \rangle. \quad (3.91)$$

Используя значения произведений (3.33) и (3.89), изоспиновые матричные элементы (3.69) и

$$\begin{aligned} \langle p | 4 + 35 g_l(i) | p \rangle &= 39, & \langle n | 4 + 35 g_l(i) | n \rangle &= 4, \\ \langle p | 4 + 35 g_l(i) | n \rangle &= 0, & \langle n | 4 + 35 g_l(i) | p \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.92)$$

матричные элементы операторов $M_{1\mu}^{M,11}$ и $M_{1\mu}^{M,12}$, входящих в (2.32), на функциях (3.18), (3.19) можно записать соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_{s\sigma_f}(\mathbf{Q}) | M_{1\mu}^{M,11} | \tilde{\Phi}_{s\sigma_i}(\mathbf{R}) \rangle &= \\ = i \frac{41\sqrt{3} \pi^{10}}{98} \mu_N \exp(\mathbf{QR}/2) [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^2 [\mathbf{R} \times \mathbf{Q}]_{1\mu} \delta_{\sigma_f \sigma_i}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_{s\sigma_f}(\mathbf{Q}) | M_{1\mu}^{M,12} | \tilde{\Phi}_{s\sigma_i}(\mathbf{R}) \rangle &= \\ = i \frac{4\sqrt{3} \pi^{10}}{49} \mu_N [3 - 2 \exp(\mathbf{QR}/2)] [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^2 [\mathbf{R} \times \mathbf{Q}]_{1\mu} \delta_{\sigma_f \sigma_i}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

При получении (3.93) используется формула (1.69), а при получении (3.94) – формула (1.67). Матричные элементы на производящих функциях, генерирующих трансляционно-инвариантный базис АВМРГ, соответствующие (3.93), (3.94), находятся с помощью (1.48), (1.51):

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^{M,l1} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \quad (3.95) \\ & = i \frac{41}{98} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \mu_N \exp(-\mathbf{QR}/7) [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^2 [\mathbf{R} \times \mathbf{Q}]_{1\mu} \delta_{\sigma_f \sigma_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^{M,l2} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \quad (3.96) \\ & = i \frac{4}{49} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \mu_N \exp(-9\mathbf{QR}/14) [3 - 2\exp(\mathbf{QR}/2)] [\exp(\mathbf{QR}/2) - 1]^2 [\mathbf{R} \times \mathbf{Q}]_{1\mu} \delta_{\sigma_f \sigma_i}. \end{aligned}$$

Суммируя (3.95) и (3.96), получим производящие матричные элементы орбитальной части (2.32) магнитного дипольного оператора [113]:

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^{M,l} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = i \frac{\mu_N}{98} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{25 \exp(\mathbf{QR}/2) + 24}{\exp(\mathbf{QR}/2) - 1} [\mathbf{R} \times \mathbf{Q}]_{1\mu} \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle. \quad (3.97)$$

Матричные элементы операторов (2.30), (2.32) в базисе АВМРГ (1.13) в соответствии с (3.91), (3.97) и (1.52) определяются формулами:

$$\langle l_f m_f s \sigma_f \nu_f | M_{1\mu}^{M,s} | l_i m_i s \sigma_i \nu_i \rangle = \frac{\mu_N g_n}{2} \sqrt{\frac{3s(s+1)}{\pi}} \delta_{\nu_f \nu_i} \delta_{l_f l_i} \delta_{m_f m_i} C_{s\sigma_i 1\mu}^{s\sigma_f}, \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} & \langle l_f m_f s \sigma_f \nu_f | M_{1\mu}^{M,l} | l_i m_i s \sigma_i \nu_i \rangle = \quad (3.99) \\ & = \frac{3\mu_N}{98} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 16 \Sigma_{1,\nu_f-1} - \Sigma_{3,\nu_f-1} \right\} \bar{\Omega}_2(1; (i), (f)) C_{l_i m_i 1\mu}^{l_f m_f} \delta_{\sigma_f \sigma_i}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\bar{\Omega}_2(1; (i), (f)) = \sqrt{2l_i + 1} \delta_{\nu_f \nu_i} \sum_l C_{l_f 0 10}^{l 0} C_{l_i 0 10}^{l 0} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_f & l & l_i \end{matrix} \right\} \frac{\varepsilon_{\nu_f-1}^l}{\kappa_{\nu_f l_f} \kappa_{\nu_i l_i}}, \quad (3.100)$$

$$\Sigma_{3\nu} = \frac{2\pi}{\nu!} \left[-74 \left(\frac{5}{14} \right)^\nu + 25 \left(-\frac{1}{7} \right)^\nu + 8 \left(-\frac{9}{14} \right)^\nu + 41 \left(\frac{6}{7} \right)^\nu \right].$$

При получении этих выражений использовалось равенство [122]

$$[\mathbf{R} \times \mathbf{Q}]_{1\mu} = -i\sqrt{2} \sum_{\nu, \lambda} C_{1\nu 1\lambda}^{1\mu} R_{1\nu} Q_{1\lambda} \quad (3.101)$$

и (3.49), (3.61), (3.74)–(3.76), (3.78). Из (3.98), (3.99) в соответствии с (1.58) следуют матричные элементы в базисе АВМРГ (1.11) [113]:

$$\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s \nu_f | M_{1\mu}^{M,s} | J_i^{\pi_i} M_i l_i s \nu_i \rangle = \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{J_f+l_f+s+1} \frac{\mu_N g_n}{2} \sqrt{\frac{3s(s+1)}{\pi}} \left\{ \begin{matrix} s & l_f & J_i \\ J_f & 1 & s \end{matrix} \right\} \Pi_{J_i s} \delta_{l_f l_i} \delta_{v_f v_i} C_{J_i M_i 1 \mu}^{J_f M_f}, \\
&\quad \left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{1\mu}^{M, l} \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = \quad (3.103) \\
&= (-1)^{J_i+l_f+s+1} \frac{3\mu_N}{98} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 16\Sigma_{1, v_f-1} - \Sigma_{3, v_f-1} \right\} \Omega_2(1; (i), (f)) C_{J_i M_i 1 \mu}^{J_f M_f},
\end{aligned}$$

где

$$\Omega_2(1; (i), (f)) = \Pi_{J_i l_f} \delta_{v_f v_i} \left\{ \begin{matrix} l_i & s & J_i \\ J_f & 1 & l_f \end{matrix} \right\} \sum_l C_{l_f 0 10}^{l 0} C_{l_i 0 10}^{l 0} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_f & l & l_i \end{matrix} \right\} \frac{\varepsilon_{v_f-1}^l}{\kappa_{v_f l_f} \kappa_{v_i l_i}}. \quad (3.104)$$

Сумма матричных элементов (3.102) и (3.103) образует матричные элементы магнитного дипольного оператора (2.29) в базисе АВМРГ (1.11) для семинуклонной системы $\alpha + h$. Приведенные матричные элементы этого оператора нетрудно получить, исходя из теоремы Вигнера–Экарта (2.4).

3.3. Результаты расчетов и обсуждение

Явные выражения для парциальных астрофизических S -факторов реакции радиационного захвата ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ получаются из (3.7) после подстановки в него парциального сечения (3.4), приведенных матричных элементов электрического дипольного оператора (3.66) и конкретных значений квантовых чисел. S -факторы, отвечающие радиационному захвату в системе $\alpha + h$ с образованием ${}^7\text{Be}$ в основном состоянии, имеют следующий явный вид:

$$S_{1/2^+ \rightarrow 3/2^-}(E_{\text{ц.м.}}) = 5\tilde{C}(E_{\text{ц.м.}} + E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)})^3 r_0^4 \Omega_{1/2^+ \rightarrow 3/2^-}^{(1)} \exp(2\pi\eta), \quad (3.105)$$

$$S_{3/2^+ \rightarrow 3/2^-}(E_{\text{ц.м.}}) = \tilde{C}(E_{\text{ц.м.}} + E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)})^3 r_0^4 \Omega_{3/2^+ \rightarrow 3/2^-}^{(2)} \exp(2\pi\eta),$$

$$S_{5/2^+ \rightarrow 3/2^-}(E_{\text{ц.м.}}) = 9\tilde{C}(E_{\text{ц.м.}} + E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)})^3 r_0^4 \Omega_{5/2^+ \rightarrow 3/2^-}^{(2)} \exp(2\pi\eta).$$

В свою очередь, парциальные S -факторы, характеризующие захват с образованием ${}^7\text{Be}$ в первом возбужденном состоянии, определяются выражениями:

$$S_{1/2^+ \rightarrow 1/2^-}(E_{\text{ц.м.}}) = 2.5\tilde{C}(E_{\text{ц.м.}} + \varepsilon^{(\alpha+h)})^3 r_0^4 \Omega_{1/2^+ \rightarrow 1/2^-}^{(1)} \exp(2\pi\eta), \quad (3.106)$$

$$S_{3/2^+ \rightarrow 1/2^-}(E_{\text{ц.м.}}) = 5\tilde{C}(E_{\text{ц.м.}} + \varepsilon^{(\alpha+h)})^3 r_0^4 \Omega_{3/2^+ \rightarrow 1/2^-}^{(2)} \exp(2\pi\eta).$$

В формулах (3.105), (3.106) введены обозначения:

$$\tilde{C} = \frac{8\pi e^2}{2205(\hbar c)^3}, \quad \varepsilon^{(\alpha+h)} = E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)} - E_{\text{возб}}^{(1)} \text{ (7 Be)}, \quad 2\pi\eta = \sqrt{E_G^{(\alpha+h)} / E_{\text{ц.м.}}}, \quad (3.107)$$

$$\Omega_{J_i^{\pi_i} \rightarrow J_f^{\pi_f}}^{(1)} = \left| \sum_n C_{J_f^{\pi_f} l_f s n}^{(\bar{n})} \left(\frac{\kappa_{n0}}{\kappa_{n1}} C_{J_i^{\pi_i} l_i s n}^{(\text{H})} + \frac{\kappa_{n1}}{\kappa_{(n+1)0}} C_{J_i^{\pi_i} l_i s (n+1)}^{(\text{H})} \right) \right|^2,$$

$$\Omega_{J_i^{\pi_i} \rightarrow J_f^{\pi_f}}^{(2)} = \left| \sum_n C_{J_i^{\pi_i} l_i s n}^{(\text{H})} \left(\frac{\kappa_{n1}}{\kappa_{n2}} C_{J_f^{\pi_f} l_f s n}^{(\bar{n})} + \frac{\kappa_{n2}}{\kappa_{(n+1)1}} C_{J_f^{\pi_f} l_f s (n+1)}^{(\bar{n})} \right) \right|^2,$$

$$\kappa_{nl} = \sqrt{\frac{2^{l+2} \pi (n+l)!}{n!(2n+2l+1)!} \left[\left(\frac{6}{7}\right)^{2n+l} - 3\left(\frac{5}{14}\right)^{2n+l} + 3\left(-\frac{1}{7}\right)^{2n+l} - \left(-\frac{9}{14}\right)^{2n+l} \right]},$$

$n = (v - l)/2$ – радиальное квантовое число, определяющее число узлов радиальной части осцилляторной волновой функции (не считая точки начала координат).

При решении систем уравнений АВМРГ (1.29) и (1.31) для нахождения численных значений коэффициентов $C^{(\bar{n})}$ и $C^{(\text{H})}$ соответственно в качестве ядерного NN-потенциала использовался модифицированный потенциал Хазегавы–Нагаты (1.21), который имеет три параметра, допускающих небольшую вариацию: $g_{\text{ц}}$, g_{ls} , g_{T} (интенсивности майорановского центрального, спин-орбитального и тензорного взаимодействий соответственно). Однако, в рассматриваемой задаче тензорное взаимодействие не дает вклада, поскольку канальный спин системы равен 1/2 как в начальном, так и в конечном состояниях. Кроме того, результаты расчетов оказываются слабо чувствительными к вариации параметра g_{ls} . В результате в потенциале в небольших пределах варьировался только параметр $g_{\text{ц}}$. Еще одним варьируемым параметром является осцилляторный радиус r_0 , входящий в осцилляторные функции (1.9). Таким образом, в рассматриваемой задаче имеется два подгонных параметра – r_0 и $g_{\text{ц}}$. Эти параметры были выбраны таким образом ($r_0 = 1.2$ фм, $g_{\text{ц}} = 1.035$), чтобы достичь наилучшего описания фаз (фазовых сдвигов) упругого рассеяния ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^4\text{He}$ [154–159] и современных экспериментальных данных по астрофизическому S -фактору реакции радиационного захвата

${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ [64–74]. Соответствующие данные по фазам рассеяния и S -фактору вместе с их теоретическими расчетами приведены на рисунках 3.2 и 3.3.

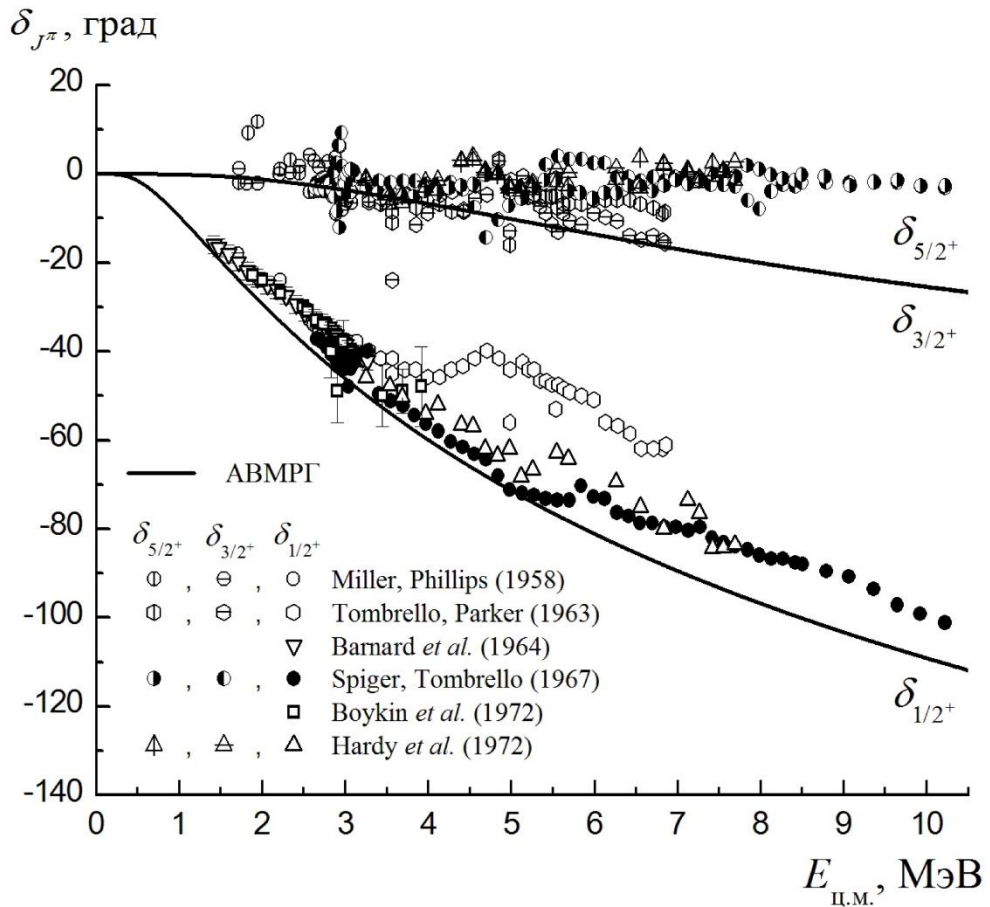


Рисунок 3.2. Фазы упругого рассеяния ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^4\text{He}$. Сплошные линии – расчет в рамках АВМРГ ($r_0 = 1.2$ фм, $g_u = 1.035$), различные фигурки – данные из работ [154–159].

На рисунке 3.2 представлены шесть наборов данных [154–159] по фазовому сдвигу $\delta_{1/2^+}$ упругого рассеяния ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^4\text{He}$ в диапазонах энергии $E_{\text{ц.м.}} = 1.7 \div 3.1$ МэВ, $3.3 \div 6.9$ МэВ, $2.6 \div 10.3$ МэВ, $3.2 \div 7.7$ МэВ, $1.4 \div 3.3$ МэВ, $1.9 \div 3.9$ МэВ соответственно и четыре набора данных [154–157] по фазовым сдвигам $\delta_{3/2^+}$ и $\delta_{5/2^+}$ в диапазонах энергии $E_{\text{ц.м.}} = 1.7 \div 3.1$ МэВ, $3.3 \div 6.9$ МэВ, $2.6 \div 10.3$ МэВ, $3.2 \div 7.7$ МэВ соответственно. Фаза $\delta_{1/2^+}$ при наиболее низких энергиях представлена в работе [158], а фазы $\delta_{3/2^+}$, $\delta_{5/2^+}$ – в работе [154]. Наиболее широкий диапазон энергий охвачен в [156]. Погрешности значений фазы $\delta_{1/2^+}$ указаны только в [158, 159]. Погрешности фаз $\delta_{3/2^+}$, $\delta_{5/2^+}$ не указаны ни в одной из работ.

Из рисунка 3.2 видно, что значения фаз $\delta_{3/2^+}$ и $\delta_{5/2^+}$ сконцентрированы в основном в окрестности 0° . В целом, данные по фазе $\delta_{3/2^+}$ согласованы между собой, а данные по фазе $\delta_{5/2^+}$ – между собой. Небольшое расхождение имеется с данными из работы [155], которые при энергиях $E_{\text{ц.м.}} > 5$ МэВ лежат немного ниже данных [156, 157]. Что касается фазы $\delta_{1/2^+}$, то она убывает с ростом энергии. Данные [154, 156–159] по этой фазе согласуются друг с другом, но находятся в расхождении с данными [155], начиная с 4 МэВ. Если до 4 МэВ данные [155] согласованы с остальными данными, то после 4 МэВ данные [155] лежат несколько выше, чем [156, 157]. Рассчитанные в рамках АВМРГ фазовые сдвиги $\delta_{3/2^+}$ и $\delta_{5/2^+}$ накладываются друг на друга и почти неразличимы на рисунке. Они находятся в очень хорошем согласии со всеми данными вплоть до 5 МэВ, а с данными [155] даже во всем их диапазоне энергий (3.3÷6.9 МэВ). Расчетный фазовый сдвиг $\delta_{1/2^+}$ находится в хорошем согласии со всеми данными вплоть до 5.5 МэВ, кроме данных [155], с которыми он согласуется вплоть до 4 МэВ. При этом с [156] имеется очень хорошее соответствие. Расхождение расчетных фаз $\delta_{1/2^+}$ и $\delta_{3/2^+}$, $\delta_{5/2^+}$ с имеющимися данными при энергиях больших 5.5 МэВ и 5 МэВ соответственно (расчетные кривые лежат несколько ниже), по-видимому, обусловлено тем, что при энергиях ≥ 4.0193 МэВ [148] наряду с упругим рассеянием изотопов гелия возможна реакция ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, p){}^6\text{Li}$, а при энергиях > 5.4935 МэВ [148] становится возможной и реакция ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, pd){}^4\text{He}$. В нашем одноканальном расчете эти каналы реакции не учитываются. Не исключено, что именно поэтому расчетная кривая оказывается слегка заниженной по сравнению с имеющимися данными в области энергий, где эти каналы являются открытыми.

Из рисунка 3.3 следует, что расчетная кривая для S -фактора [115] очень хорошо согласуется со всеми современными экспериментальными данными [64–74] как в области низких (< 1 МэВ), так и в области средних (> 1 МэВ) энергий. Однако, расчетная кривая так же, как и современные экспериментальные данные, оказывается завышенной по сравнению со “старыми” данными [56] в области

средних энергий и, в целом, имеет более плавную энергетическую зависимость во всем диапазоне энергий, чем [56]. Эксперимент [56] является единственным “старым” экспериментом по измерению S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, в котором достаточно обширно охвачены средние энергии. Поэтому большинство теоретических расчетов, выполненных до появления современных данных, были ориентированы именно на его описание. Однако, расчет, представленный в данной диссертации, свидетельствует в пользу современных экспериментальных данных.

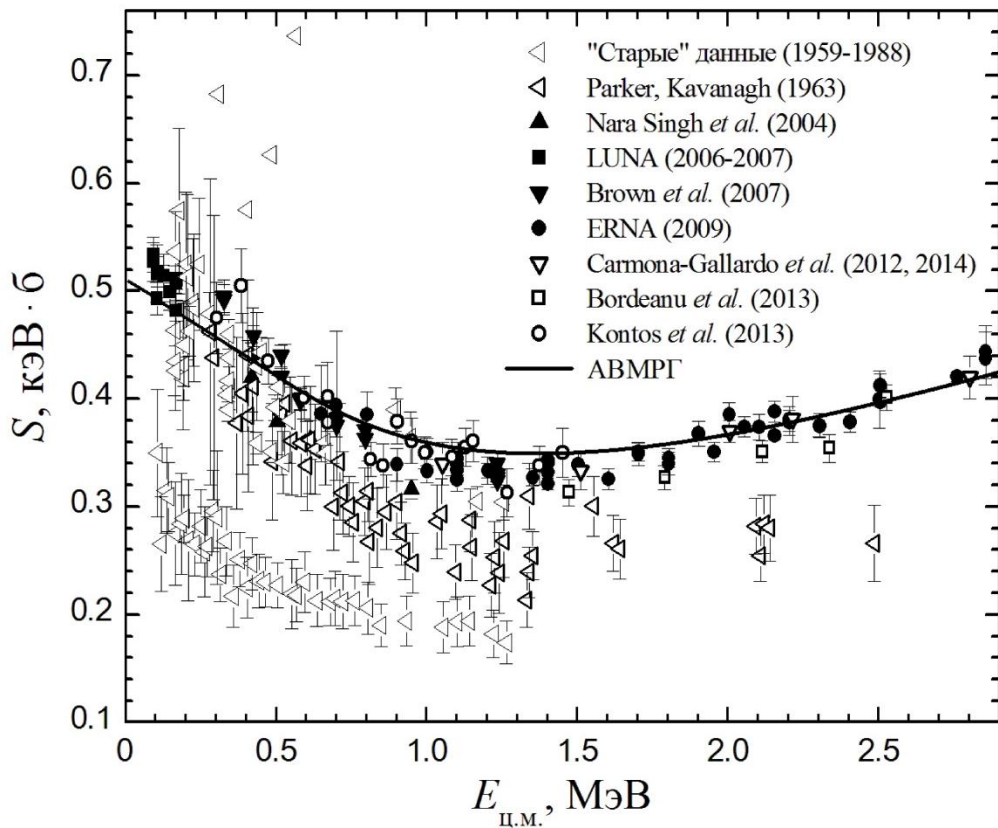


Рисунок 3.3. *Астрофизический S -фактор реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. Сплошная линия – расчет в рамках АВМПГ ($r_0 = 1.2$ фм, $g_u = 1.035$), различные фигурки – экспериментальные данные из работ [43, 56–60, 62–74].*

В таблице 3.1 приведены экспериментальные [148, 160] и расчетные значения энергий основных состояний изотопов гелия $E({}^4\text{He})$, $E({}^3\text{He})$, основного $E({}^7\text{Be})$ и первого возбужденного $E({}^7\text{Be}^*)$ состояний ядра ${}^7\text{Be}$, порога развала ${}^7\text{Be}$ на два кластера $\alpha + h$, а также разности $\varepsilon^{(\alpha+h)}$ последнего и энергии возбуждения первого возбужденного состояния ${}^7\text{Be}$, полученные при таких же параметрах, как фазовые сдвиги и S -фактор на рисунках 3.2 и 3.3.

Таблица 3.1. Энергии ядер ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Be}$.

Энергия (МэВ)	$E({}^4\text{He})$	$E({}^3\text{He})$	$E({}^7\text{Be})$	$E({}^7\text{Be}^*)$	$E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)}$	$\varepsilon^{(\alpha+h)}$
Эксперимент	-28.296	-7.718	-37.600	-37.171	1.586	1.157
Расчет	-26.703	-2.073	-29.754	-29.627	0.978	0.850

Из таблицы 3.1 видно, что расчетные энергии $E({}^4\text{He})$, $E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)}$ и $\varepsilon^{(\alpha+h)}$ достаточно близки к их экспериментальным значениям, в то время как расчетные энергии $E({}^3\text{He})$, $E({}^7\text{Be})$ и $E({}^7\text{Be}^*)$ отличаются от экспериментальных на несколько МэВ. Данное отличие, по-видимому, связано с тем, что для описания h-кластера используется весьма простая волновая функция, а при описании структуры ${}^7\text{Be}$ учитывается только одна единственная кластерная конфигурация $\alpha + h$ без рассмотрения других, например, ${}^6\text{Li} + p$, относящейся к закрытому каналу.

На рисунках 3.4 и 3.5 показаны расчетные кривые для S-фактора и фазовых сдвигов соответственно при различных значениях параметров r_0 и $g_{\text{ц}}$. В частности, рассмотрены критерии выбора этих параметров, когда удается точно воспроизвести $E({}^4\text{He})$ ($r_0 = 1.386$ фм) и в совокупности с ней одну из следующих величин: $E({}^7\text{Be})$ ($g_{\text{ц}} = 0.9169$), $E({}^7\text{Be}^*)$ ($g_{\text{ц}} = 0.92506$), $E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)}$ ($g_{\text{ц}} = 0.9792$), $\varepsilon^{(\alpha+h)}$ ($g_{\text{ц}} = 0.99077$) (см. таблицу 3.2).

Таблица 3.2. Энергии ядер ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}$ и ${}^7\text{Be}$, вычисленные при различных значениях параметра $g_{\text{ц}}$.

Энергия, МэВ	Эксперимент	Расчет				
		$r_0 = 1.386$ фм				
		$g_{\text{ц}} = 0.9169$	$g_{\text{ц}} = 0.92506$	$g_{\text{ц}} = 0.9792$	$g_{\text{ц}} = 0.99077$	$g_{\text{ц}} = 1.021$
$E({}^4\text{He})$	-28.296	-28.296	-28.296	-28.296	-28.296	-28.296
$E({}^3\text{He})$	-7.718	-5.638	-5.638	-5.638	-5.638	-5.638
$E({}^7\text{Be})$	-37.600	-37.600	-37.302	-35.520	-35.184	-34.388
$E({}^7\text{Be}^*)$	-37.171	-37.463	-37.171	-35.420	-35.091	-34.312
$E_{\text{пор}}^{(\alpha+h)}$	1.586	3.665	3.368	1.586	1.250	0.454
$\varepsilon^{(\alpha+h)}$	1.157	3.529	3.237	1.486	1.157	0.378

Сплошная линия на рисунке 3.4 получена при тех же значениях параметров, что и на рисунке 3.3. Расчетные кривые (а)–(г) оказались значительно завышенными по сравнению со сплошной линией. Кривая (д) в области средних энергий очень хорошо согласуется как со сплошной линией, так и с представленными там экспериментальными данными. Однако, в области низких энергий эта кривая отклоняется от сплошной линии и лежит немного ниже современных экспериментальных данных. Рисунок 3.4 показывает, что результаты расчетов S -фактора весьма чувствительны к вариации параметра $g_{\text{ц}}$.

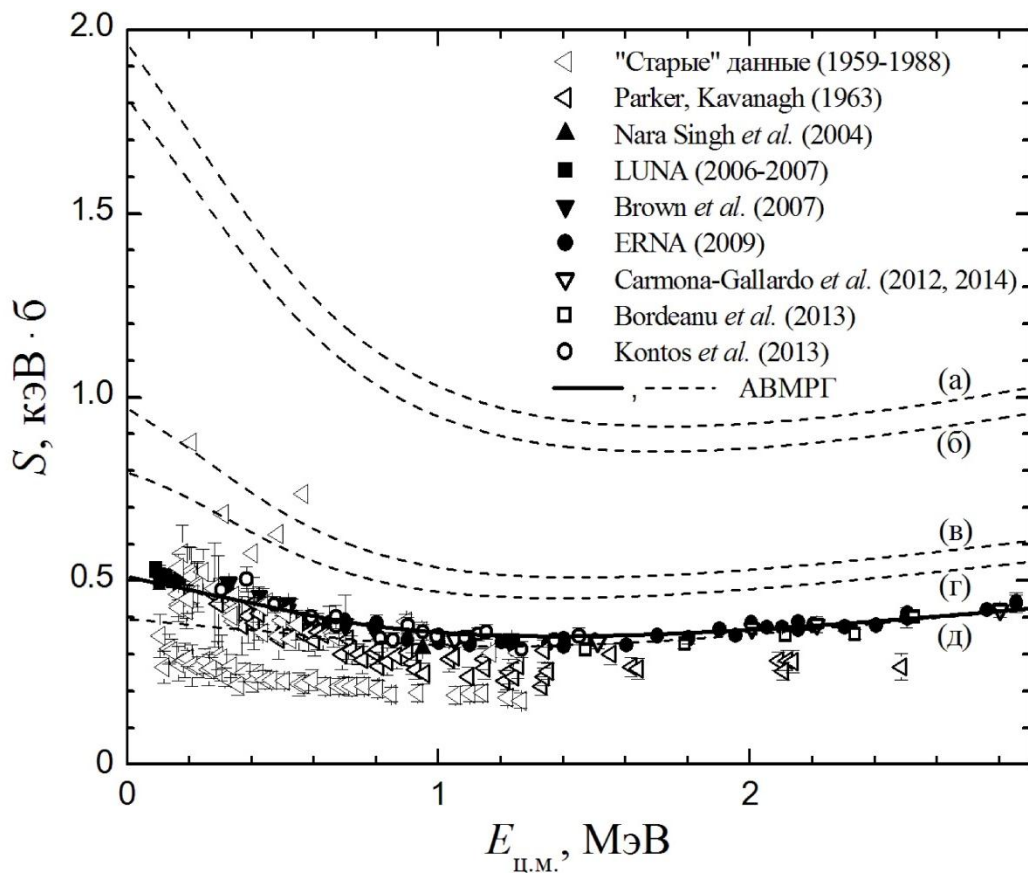


Рисунок 3.4. Астрофизический S -фактор реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, вычисленный при различных значениях параметров модели. Пунктирные линии – расчет с $r_0 = 1.386$ фм и $g_{\text{ц}} = 0.9169$ (а), 0.92506 (б), 0.9792 (в), 0.99077 (г), 1.021 (д); сплошная линия – расчет с $r_0 = 1.2$ фм и $g_{\text{ц}} = 1.035$.

Две верхние пунктирные линии для фаз $\delta_{1/2^+}$ и $\delta_{3/2^+}$, $\delta_{5/2^+}$ (кривые для фаз $\delta_{3/2^+}$ и $\delta_{5/2^+}$ почти неразличимы) на рисунке 3.5 получены при параметрах, отвечающих кривым (а) и (б) на рисунке 3.4. Эти параметры уточняют описание фаз упругого рассеяния, но, к сожалению, значительно завышают S -фактор. Таким обра-

зом, наиболее оптимальными для реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ являются значения параметров $r_0 = 1.2$ фм, $g_{\text{ц}} = 1.035$, при которых удается одновременно хорошо описать современные экспериментальные данные по S -фактору этой реакции и данные по фазам упругого рассеяния ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^4\text{He}$, а также удается достичь вполне разумного соответствия со всей остальной совокупностью представленных данных.

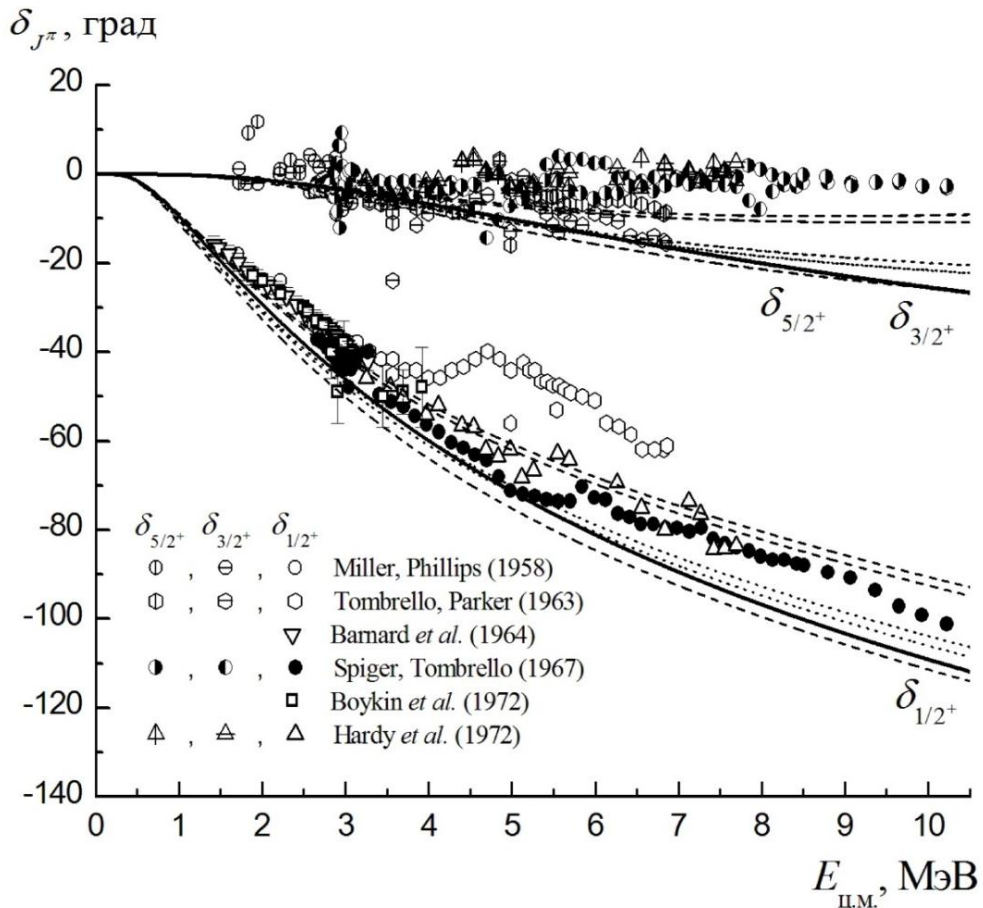


Рисунок 3.5. Фазы упругого рассеяния ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^4\text{He}$. Фаза $\delta_{1/2^+}$: верхняя, средняя и нижняя пунктирные линии – расчет с $r_0 = 1.386$ фм и $g_{\text{ц}} = 0.9169, 0.92506, 1.021$ соответственно; верхняя и нижняя точечная линии – расчет с $r_0 = 1.386$ фм и $g_{\text{ц}} = 0.9792, 0.99077$ соответственно. Для фаз $\delta_{3/2^+}, \delta_{5/2^+}$ все аналогично. Сплошные линии и фигурки – см. рисунок 3.2.

На рисунке 3.6 показаны парциальные S -факторы (3.105), (3.106) и S -факторы захвата в системе $\alpha + h$ с образованием ${}^7\text{Be}$ в основном S_0 и первом возбужденном S_1 состояниях, вычисленные с оптимальным набором значений параметров – $r_0 = 1.2$ фм, $g_{\text{ц}} = 1.035$. Также на рисунке отмечены современные экспериментальные данные [67, 68, 72, 74] для S_0 и S_1 , полученные в ходе измерений мгновенного γ -излучения, образующегося в результате реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$.

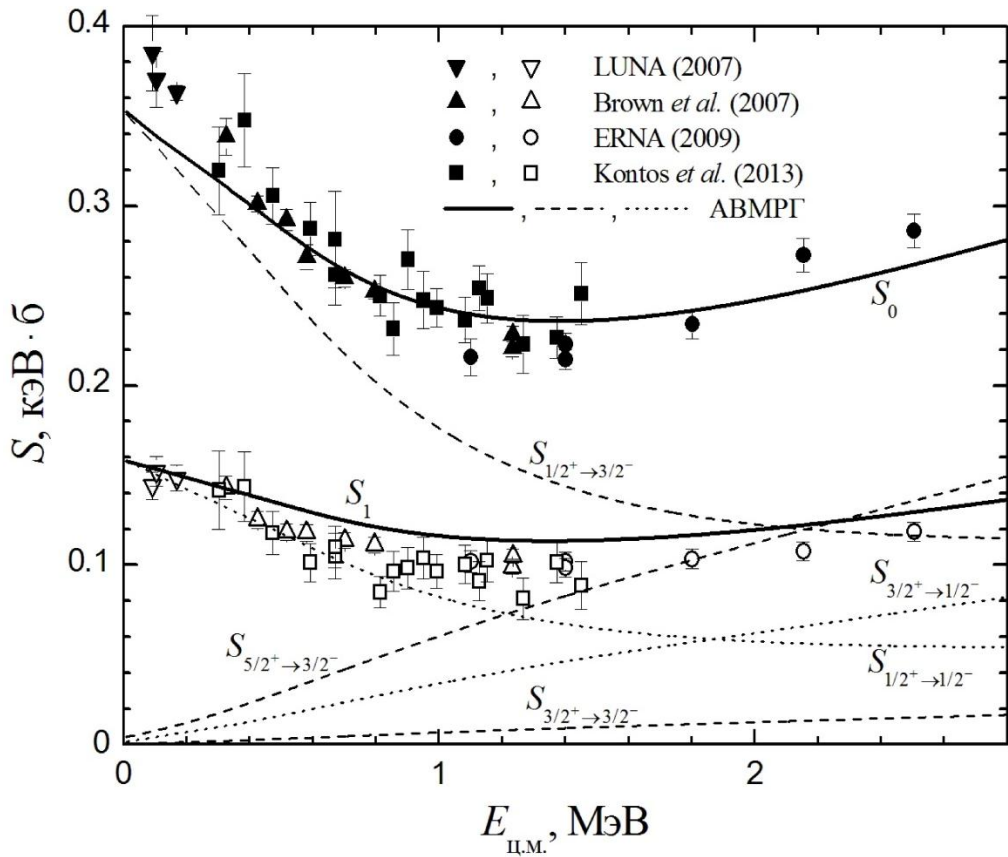


Рисунок 3.6. Парциальные S -факторы реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. Кривые – расчет в рамках ABMPG с $r_0 = 1.2$ фм и $g_\alpha = 1.035$. Фигурки – экспериментальные данные [67, 68, 72, 74].

Из рисунка 3.6 видно, что теоретические кривые для S_0 и S_1 достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. При этом S_0 чуть больше чем в два раза превосходит по величине S_1 во всем диапазоне представленных энергий. Из рисунка также видно, что захват в системе $\alpha + h$, находящейся в S -состоянии, с образованием ${}^7\text{Be}$ в основном состоянии вносит наибольший вклад в полный S -фактор реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ при низких энергиях. Захват в системе $\alpha + h$, находящейся в S -состоянии рассеяния, с образованием ${}^7\text{Be}$ в первом возбужденном состоянии также существенен, но его вклад меньше, чем вклад захвата с образованием ${}^7\text{Be}$ в основном состоянии. В области средних энергий, начиная с энергий ~ 1.2 МэВ, становится существенным вклад в полный S -фактор от захвата в системе $\alpha + h$, находящейся в D -состоянии рассеяния, с образованием ${}^7\text{Be}$ в основном состоянии, а с энергий ~ 1.8 МэВ – и с образованием ${}^7\text{Be}$ в первом возбужденном состоянии. Начиная с энергий ~ 2.2 МэВ, $S_{5/2^+ \rightarrow 3/2^-}$ превосходит $S_{1/2^+ \rightarrow 3/2^-}$. Таким образом, радиационный захват в системе $\alpha + h$, находящейся в S -

состояниях рассеяния, создает доминирующий вклад в полный S -фактор при низких энергиях, особенно в окрестности нулевой энергии. В области средних энергий уже определенную роль начинает играть захват в системе $\alpha + h$, находящейся в D -состояниях рассеяния.

На рисунке 3.7 показан расчетный коэффициент ветвления реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ [115], сравнение которого с экспериментальными данными [56–59, 62, 67, 68, 72, 74] также является очень важной проверкой достоверности теоретической модели.

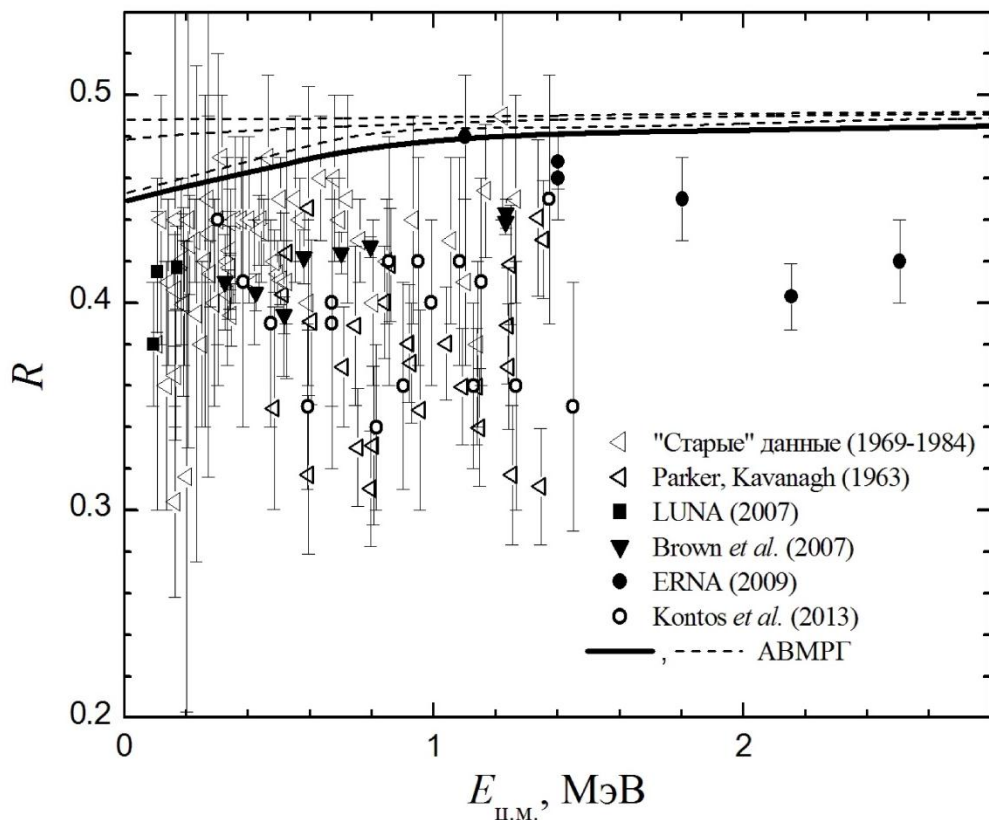


Рисунок 3.7. Коэффициент ветвления реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. Фигурки – экспериментальные данные (см. текст). Сплошная линия – расчет с $r_0 = 1.2$ фм, $g_u = 1.035$. Верхняя, средняя, нижняя пунктирные линии – расчет с $r_0 = 1.386$ фм, $g_u = 0.9169, 0.9792, 1.021$ соответственно.

Из рисунка 3.7 следует, что расчетный коэффициент ветвления R , который является отношением S_1 к S_0 , почти не зависит от энергии в диапазоне указанных средних энергий. В диапазоне низких энергий R слегка уменьшается с понижением энергии. Наилучшего согласия с экспериментальными данными достигает сплошная линия, отвечающая оптимальному набору параметров. Пунктирные ли-

нии отличаются от сплошной, в основном, в области низких энергий. Коэффициент ветвления, в целом, демонстрирует меньшую чувствительность к параметрам модели по сравнению с парциальными и суммарным S -факторами.

В расчетах достигнуто достаточно хорошее согласие теоретических величин S -факторов захвата S_0 , S_1 и коэффициента ветвления реакции R с современными экспериментальными данными. Таким образом, дана теоретическая интерпретация результатов современных экспериментов на основе микроскопического подхода, использующего реалистический нуклон-нуклонный потенциал. Кроме того, на примере рассмотренной системы можно сделать вывод о том, что АВМРГ с простейшими внутренними волновыми функциями кластеров, выбранными в виде волновых функций нижайших, допустимых принципом Паули, состояний трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек, способна вполне успешно давать детальное описание реакций радиационного захвата в легководородных системах, в том числе воспроизводить и такие тонкие характеристики, как парциальные S -факторы.

На рисунке 3.8 проводится сравнение S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, полученного нами в настоящей работе в рамках АВМРГ, с наиболее современными микроскопическими и полумикроскопическими расчетами [102, 103, 106, 108, 110], выполненными, начиная с 2000 г., а на рисунке 3.9 – с микроскопическими расчетами, базирующимися на МРГ [93, 95–98, 100, 102, 103].

В работах [102, 103] с использованием одной из реализаций МРГ, основанной на разложении волновой функции относительного движения кластеров по набору гауссовских функций, выполнены как одноканальный (нижние пунктирно-точечная и утолщенная пунктирная кривые соответственно), так и многоканальный (верхние пунктирно-точечная и утолщенная пунктирная кривые соответственно) расчеты, в которых наряду с кластерной конфигурацией $\alpha + h$ учтена также конфигурация ${}^6\text{Li} + p$. Из рисунка 3.8 видно, что одноканальные расчеты из этих работ оказываются заниженными по сравнению с наиболее современными экспериментальными данными, а многоканальные – завышены. При этом одноканальные расчеты согласованы друг с другом и хорошо описывают единственный

“старый” эксперимент [56], широко охватывающий область средних энергий.

В [106, 108] расчеты выполнены с использованием *ab initio* подходов к описанию состояний дискретного спектра ${}^7\text{Be}$. Однако, состояния непрерывного спектра трактуются в рамках потенциальной кластерной модели. Поэтому данные расчеты являются полумикроскопическими. Соответствующие этим расчетам кривые согласованы друг с другом, но при этом лежат значительно ниже современных экспериментальных данных и всех остальных кривых, приведенных на рисунке 3.8.

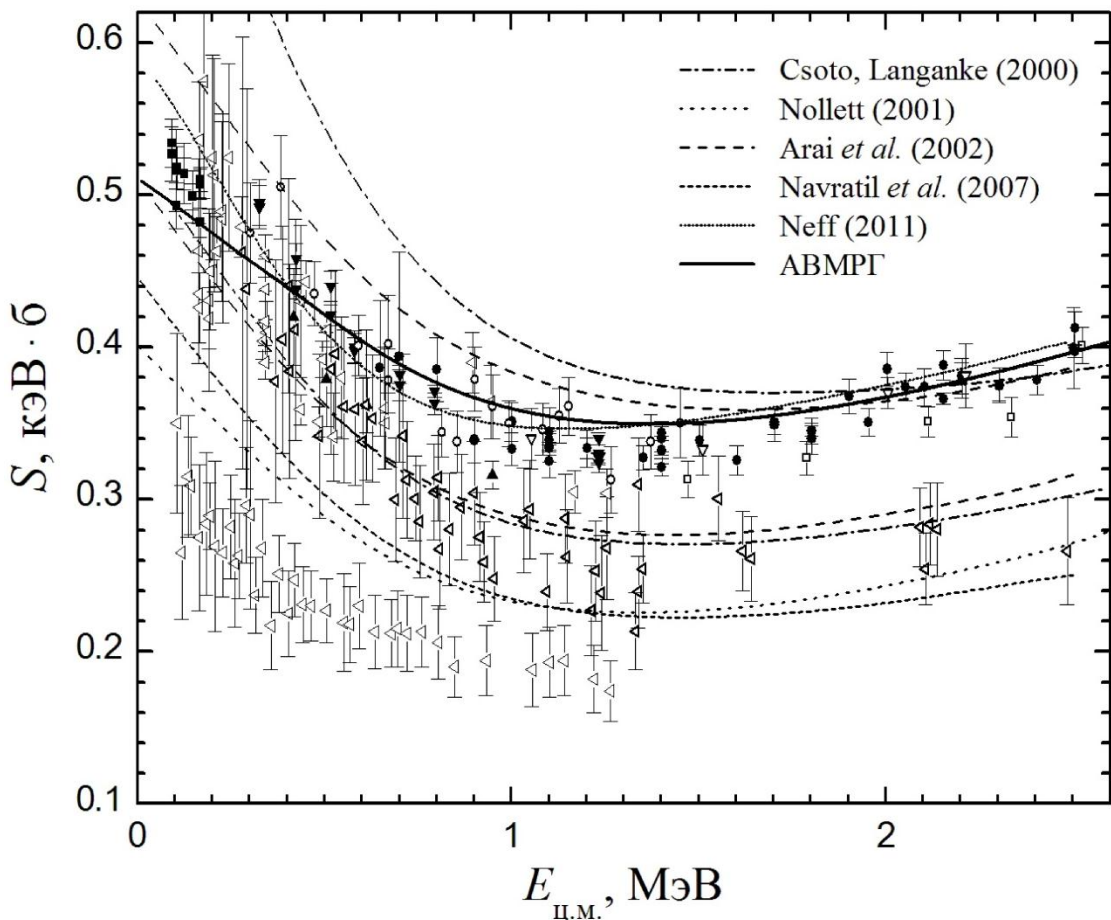


Рисунок 3.8. Сравнение астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, вычисленного в рамках АВМРГ ($r_0 = 1.2$ фм, $g_u = 1.035$), с наиболее современными микроскопическими [102, 103, 110] и полумикроскопическими [106, 108] расчетами. Фигурками отмечены экспериментальные данные (см. рисунок 3.3).

В [110] состояния дискретного и непрерывного спектров описываются в рамках *ab initio* подхода. Астрофизический S -фактор, вычисленный в этой работе, достаточно хорошо согласуется с современными данными. Но стоит отметить, что

он слегка завышен по сравнению с низкоэнергетическими данными коллаборации LUNA [70–73].

Наша расчетная кривая наилучшим образом согласуется со всей совокупностью современных экспериментальных данных по сравнению с другими кривыми на рисунке 3.8. Кроме того, она демонстрирует наиболее плавную энергетическую зависимость, которая свойственна современным данным.

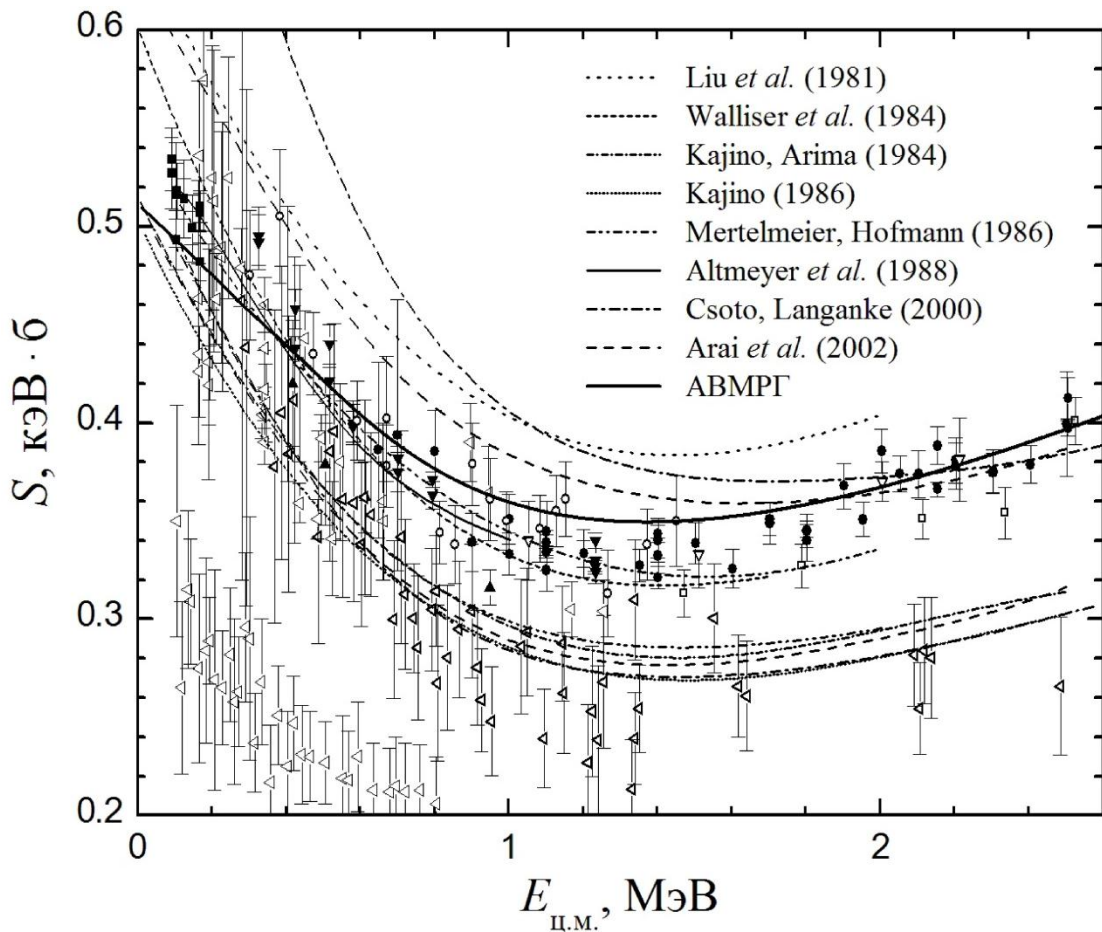


Рисунок 3.9. Сравнение астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, вычисленного в рамках АВМРГ ($r_0 = 1.2$ фм, $g_u = 1.035$), с расчетами, основанными на МРГ [93, 95–98, 100, 102, 103]. Фигурками отмечены экспериментальные данные (см. рисунок 3.3).

На рисунке 3.9 кривая, соответствующая самому первому микроскопическому расчету S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ [93], выполненному в 1981 г. в рамках традиционного МРГ, завышена по отношению к большинству экспериментальных данных.

Помимо [102, 103] многоканальный расчет S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$

представлен также в [97] (на рисунке 3.9 – верхняя пунктирная кривая с двумя точками между пунктирами). Фактически, [97] является единственной работой до 2000 г., в которой выполнен многоканальный микроскопический расчет. В отличие от кривых из работ [102, 103], кривая из [97] хорошо согласуется с современными экспериментальными данными в области низких энергий. Но при этом в области средних энергий очевидна ее тенденция к отклонению вниз от современных данных.

В [100] выполнен расчет S -фактора в области низких энергий, который находится в хорошем согласии с современными данными. Однако, тяжело судить о качестве данного расчета, поскольку он не охватывает средние энергии, также образующие весьма проблематичный диапазон.

Из рисунка 3.9 видно, что расчеты [96, 98] и одноканальные расчеты [97, 102, 103] достаточно хорошо согласуются друг с другом и “старыми” данными [56]. Но соответствующие им кривые лежат значительно ниже современных данных.

Таким образом, наш расчет наилучшим образом согласуется со всей совокупностью наиболее современных экспериментальных данных не только по сравнению с наиболее современными микроскопическими и полумикроскопическими расчетами, но и по сравнению со всеми остальными микроскопическими расчетами, основанными на МРГ и различных его реализациях.

В целом, между расчетными кривыми на рисунках 3.8 и 3.9 имеется и качественное расхождение, и значительный количественный разброс. Причина этого до сих пор остается нераскрытой.

Глава 4. Реакция радиационного захвата

${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$

4.1. Предварительные замечания

Реакция радиационного захвата ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ является зеркальной по изоспину к реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, т.е. эти реакции отличаются заменой всех протонов на нейтроны и наоборот. Реакция ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ возникает при столкновении α -частицы и тритона t (ядра ${}^3\text{H}$) и сопровождается образованием ядра ${}^7\text{Li}$ с испусканием γ -кванта. Для нее, также как и для зеркальной реакции, из закона сохранения энергии вытекает соотношение:

$$E_\gamma = E_{\text{ц.м.}} + E_{\text{пор}}^{(\alpha+t)} - E_{\text{возб}}^{(n)}({}^7\text{Li}), \quad (4.1)$$

где $E_{\text{пор}}^{(\alpha+t)}$ – порог развала ${}^7\text{Li}$ на два кластера $\alpha + t$, $E_{\text{возб}}^{(n)}({}^7\text{Li})$ – энергия возбуждения n -го внутреннего состояния ядра ${}^7\text{Li}$. Экспериментальные значения энергий $E_{\text{пор}}^{(\alpha+t)}$ и $E_{\text{возб}}^{(n)}({}^7\text{Li})$ равны [148]:

$$E_{\text{пор}}^{(\alpha+t)} = 2.467, \quad E_{\text{возб}}^{(0)}({}^7\text{Li}) = 0, \quad E_{\text{возб}}^{(1)}({}^7\text{Li}) = 0.478, \quad E_{\text{возб}}^{(2)}({}^7\text{Li}) = 4.652. \quad (4.2)$$

(все энергии измеряются в МэВ). С учетом этих значений можно получить следующие соотношения:

$$E_\gamma^{(0)} = E_{\text{ц.м.}} + 2.467, \quad E_\gamma^{(1)} = E_{\text{ц.м.}} + 1.989, \quad E_\gamma^{(2)} = E_{\text{ц.м.}} - 2.185, \quad (4.3)$$

где $E_\gamma^{(n)}$ – энергия γ -кванта, испускаемого в результате захвата в системе $\alpha + t$ с образованием ядра ${}^7\text{Li}$ в n -ом состоянии. Из (4.3) видно, что захват в системе $\alpha + t$, сопровождающийся образованием ${}^7\text{Li}$ в основном и первом возбужденном состо-

яниях, возможен при любых энергиях относительного движения. При этом захват с образованием ${}^7\text{Li}$ во втором возбужденном состоянии возможен только, начиная с энергий больших 2.185 МэВ. Схема реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ показана на рисунке 4.1.

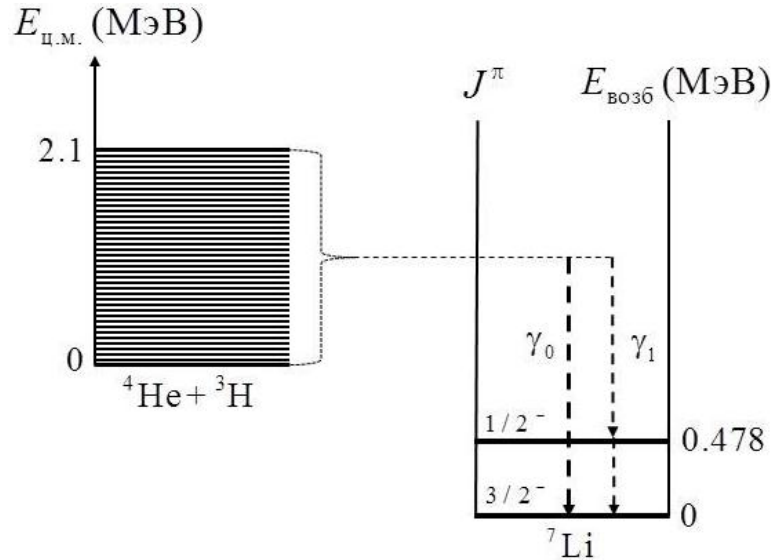


Рисунок 4.1. Схема переходов, сопровождающих реакцию ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$.

В области энергий $E_{\text{ц.м.}}$, не превышающих 1.5 МэВ, доминирующий вклад в полное сечение рассматриваемой реакции дает радиационный E1-захват в системе $\alpha + t$, находящейся в S- и D-состояниях рассеяния [77, 98, 106]. При этом в данном диапазоне энергий, как видно из (4.3), захват возможен только в основное ($J^\pi = 3/2^-$) и первое возбужденное ($J^\pi = 1/2^-$) состояния ядра ${}^7\text{Li}$. Состояния ${}^7\text{Li}$ рассматриваем в рамках одноканального варианта АВМРГ как связанные P-состояния системы, состоящей из двух кластеров $\alpha + t$, которые считаем невозбужденными ($s = 1/2$). Парциальные сечения реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ в рамках АВМРГ выражаются формулой, аналогичной формуле (3.4) для зеркальной реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, с теми же значениями квантовых чисел для захватов, сопровождающихся образованием ${}^7\text{Li}$ в основном и первом возбужденном состояниях. Полное сечение и коэффициент ветвления реакции определяются выражениями вида (3.5) и (3.6) соответственно. Астрофизический S-фактор имеет вид (3.7), но с энергией Гамова $E_G = 6.76$ МэВ для системы $\alpha + t$.

Таким образом, все сказанное ранее относительно расчета сечения и астрофи-

зического S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ остается справедливым и для зеркальной реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$. Принципиальное отличие здесь проявляется в матричных элементах кулоновского взаимодействия, электромагнитных мультипольных операторов и в асимптотике волновой функции относительного движения.

4.2. Вычисление матричных элементов операторов семикулонной системы в кластерном представлении ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ в базисе АВМРГ

4.2.1. Производящие матричные элементы гамильтониана

Внутренняя трансляционно-неинвариантная волновая функции нижайшего, допустимого принципом Паули, состояния α -кластера в обычной осцилляторной модели оболочек имеет вид (3.8). Внутренние волновые функции (3.9), (3.10) h -кластера отличаются от соответствующих волновых функций t -кластера изоспиновым состоянием одного из нуклонов (в h -кластере два нуклона находятся в протонном изоспиновом состоянии, а один нуклон – в нейтронном, в то время как в t -кластере все наоборот):

$$\phi_{s_t=1/2, \sigma_t=1/2}^{(t)} = A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \uparrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 \right\}, \quad (4.4)$$

$$\phi_{s_t=1/2, \sigma_t=-1/2}^{(t)} = A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \downarrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 \right\}. \quad (4.5)$$

С учетом (4.4), (4.5) функции (3.15), (3.16) для системы $\alpha + t$ принимают вид:

$$\tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=1/2}^{(\alpha+t)}(\mathbf{R}) = \quad (4.6)$$

$$= A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \uparrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 |0 p \downarrow\rangle_4 |R-0 n \uparrow\rangle_5 |R-0 p \uparrow\rangle_6 |R-0 n \downarrow\rangle_7 \right\},$$

$$\tilde{\Phi}_{s=1/2, \sigma=-1/2}^{(\alpha+t)}(\mathbf{R}) = \quad (4.7)$$

$$= A \left\{ |0 n \uparrow\rangle_1 |0 p \uparrow\rangle_2 |0 n \downarrow\rangle_3 |0 p \downarrow\rangle_4 |R-0 n \uparrow\rangle_5 |R-0 p \downarrow\rangle_6 |R-0 n \downarrow\rangle_7 \right\}.$$

Функции (4.6), (4.7) можно записать в виде (3.18), (3.19), в котором одночастич-

ные функции $\phi_i, \varphi_i, i = 1, \dots, 4$, определяются выражениями (3.20), а функции $\phi_i, \varphi_i, i = 5, \dots, 7$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi_5(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) &= \varphi_5(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) \equiv |\mathbf{R} - 0 \text{ n } \uparrow\rangle_i, \\ \phi_6(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) &\equiv |\mathbf{R} - 0 \text{ p } \uparrow\rangle_i, \quad \varphi_6(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) \equiv |\mathbf{R} - 0 \text{ p } \downarrow\rangle_i, \\ \phi_7(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) &= \varphi_7(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}) \equiv |\mathbf{R} - 0 \text{ n } \downarrow\rangle_i, \\ &i = 1, \dots, 7.\end{aligned}\tag{4.8}$$

В результате для вычисления матричных элементов гамильтониана можно воспользоваться формулами (3.21)–(3.24). Следует отметить, что для системы $\alpha + t$ выражения (3.25)–(3.33) также остаются справедливыми.

Оператор кинетической энергии (1.19) не содержит изоспиновых операторов. Поэтому его производящие матричные элементы одинаковы для зеркальных по изоспину систем $\alpha + t$ и $\alpha + h$ и определяются выражением (3.34). Производящие матричные элементы ядерного потенциала (1.21) также совпадают для обеих систем в силу изотопической инвариантности ядерных сил. Аналогичные равенства выполняются и для матричных элементов этих операторов в базисах АВМРГ. Таким образом, единственное отличие матричных элементов гамильтонианов систем $\alpha + t$ и $\alpha + h$ заключается в матричных элементах оператора кулоновского взаимодействия (1.20). Производящие матричные элементы этого оператора для системы $\alpha + h$ определяются формулами (3.35), (3.36), а для системы $\alpha + t$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | V_{\text{кул}} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{r_0} \left[\langle \mathbf{Q} | \mathbf{R} \rangle + \right. \\ &\left. + \exp(-9\mathbf{QR}/14) \int_0^1 (2U^{(+)} - U^{(-)} - U^{(0)}) (\nu - 1)^2 d(\sqrt{\zeta}) \right] \delta_{\sigma_f \sigma_i},\end{aligned}\tag{4.9}$$

где величины $U^{(+)}, U^{(-)}, U^{(0)}, \nu$ определяются формулами (3.36). Вклад во внутреннюю энергию t-кластера от центрального обменного нуклон-нуклонного взаимодействия совпадает с аналогичным вкладом во внутреннюю энергию h-кластера (3.40). Однако, внутренняя энергия t-кластера

$$\varepsilon^{(t)} = \frac{3\hbar^2}{2mr_0^2} + \varepsilon_{\text{ц}}^{(t)}, \quad \varepsilon_{\text{ц}}^{(t)} = \varepsilon_{\text{ц}}^{(h)}, \quad (4.10)$$

в отличие от внутренней энергии h -кластера (3.42) не содержит вклад от кулоновского взаимодействия.

4.2.2. Матричные элементы электрических дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного операторов

Вычисления, полностью аналогичные тем, которые были выполнены для получения производящих матричных элементов электромагнитных мультипольных операторов системы $\alpha + h$, приводят к следующим выражениям для производящих матричных элементов электрических дипольного и квадрупольного операторов, а также спиновой и орбитальной частей магнитного дипольного оператора системы $\alpha + t$ [113]:

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^E | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = -\frac{er_0}{7} [QY_{1\mu}(\mathbf{n}_Q) + RY_{1\mu}(\mathbf{n}_R)] \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{2\mu}^E | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = & \frac{er_0^2}{196} \left\{ 34(\mathbf{Q} + \mathbf{R})^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}+\mathbf{R}}) + \right. \\ & \left. + 49 \frac{(\mathbf{Q} + \mathbf{R})^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{Q}+\mathbf{R}}) - Q^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_Q) - R^2 Y_{2\mu}(\mathbf{n}_R)}{\exp(\mathbf{QR}/2) - 1} \right\} \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^{M,s} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = \frac{\mu_N g_p}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} s(s+1) C_{s\sigma_i 1\mu}^{s\sigma_f} \langle \mathbf{Q}, s | \mathbf{R}, s \rangle, \quad (4.13)$$

$$\langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | M_{1\mu}^{M,l} | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle = i \frac{\mu_N}{196} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{34 \exp(\mathbf{QR}/2) + 15}{\exp(\mathbf{QR}/2) - 1} [\mathbf{R} \times \mathbf{Q}]_{1\mu} \langle \mathbf{Q}, s\sigma_f | \mathbf{R}, s\sigma_i \rangle. \quad (4.14)$$

Из (4.11) и (3.47) видно, что производящие матричные элементы электрического дипольного оператора для систем $\alpha + t$ и $\alpha + h$ отличаются только знаком. Как следствие, то же самое остается справедливым и для матричных элементов данного оператора в базисах АВМРГ. Производящие матричные элементы других операторов для обеих кластерных конфигураций имеют схожую зависимость от генераторных параметров, но отличаются значениями некоторых коэффициентов.

В соответствие с изложенной ранее на примере системы $\alpha + \hbar$ методикой вычисления матричных элементов электромагнитных мультипольных операторов на базисных волновых функциях АВМРГ (1.11) получаем для системы $\alpha + t$ следующие матричные элементы электрических дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного операторов [113]:

$$\left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{1\mu}^E \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = (-1)^{J_i+l_f+s} \frac{er_0}{14} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \Omega_1(1; (i), (f)) C_{J_i M_i 1\mu}^{J_f M_f}, \quad (4.15)$$

$$\left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{2\mu}^E \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = (-1)^{J_i+l_f+s} \frac{er_0^2}{392} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \times \quad (4.16)$$

$$\times \left\{ 34 \Omega_1(2; (i), (f)) - \sqrt{30} \left[34 \Sigma_{1, v_f-1} + 49 \Sigma_{2, v_f-1} \right] \Omega_2(2; (i), (f)) \right\} C_{J_i M_i 2\mu}^{J_f M_f},$$

$$\left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{1\mu}^{M, s} \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = \quad (4.17)$$

$$= (-1)^{J_f+l_f+s+1} \frac{\mu_N g_p}{2} \sqrt{\frac{3s(s+1)}{\pi}} \left\{ \begin{matrix} s & l_f & J_i \\ J_f & 1 & s \end{matrix} \right\} \Pi_{J_i s} \delta_{l_f l_i} \delta_{v_f v_i} C_{J_i M_i 1\mu}^{J_f M_f},$$

$$\left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{1\mu}^{M, l} \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = \quad (4.18)$$

$$= (-1)^{J_i+l_f+s+1} \frac{3\mu_N}{196} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 10 \Sigma_{1, v_f-1} - \Sigma_{4, v_f-1} \right\} \Omega_2(1; (i), (f)) C_{J_i M_i 1\mu}^{J_f M_f},$$

где

$$\Sigma_{4\nu} = \frac{2\pi}{\nu!} \left[-83 \left(\frac{5}{14} \right)^\nu + 34 \left(-\frac{1}{7} \right)^\nu + 5 \left(-\frac{9}{14} \right)^\nu + 44 \left(\frac{6}{7} \right)^\nu \right]. \quad (4.19)$$

Сумма матричных элементов (4.17), (4.18) образует матричные элементы магнитного дипольного оператора. Приведенные матричные элементы, соответствующие матричным элементам (4.15)–(4.18), получаются путем применения теоремы Вигнера–Эккарта (2.4).

Таким образом, из (3.63), (3.83), (3.102), (3.103) и (4.15)–(4.18) видно, что для систем $\alpha + t$ и $\alpha + \hbar$ матричные элементы электрических дипольного (2.20), квадрупольного (2.22) и магнитного дипольного (2.29) операторов в базисе АВМРГ соответственно имеют схожую зависимость от квантовых чисел. В результате для обеих систем матричные элементы этих операторов можно записать в унифици-

рованной форме [113]:

$$\left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{1\mu}^E \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = \zeta \eta_1 \frac{e r_0}{14} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \Omega_1(1; (i), (f)) C_{J_i M_i 1\mu}^{J_f M_f}, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{2\mu}^E \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = \\ & = \eta_1 \frac{e r_0^2}{2 a_1} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left\{ \sqrt{30} \left[a_2 \Sigma_{1, v_f-1} + 49 \Sigma_{2, v_f-1} \right] \Omega_2(2; (i), (f)) - a_2 \Omega_1(2; (i), (f)) \right\} C_{J_i M_i 2\mu}^{J_f M_f}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{1\mu}^{M, s} \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = \\ & = \eta_2 \frac{\mu_N g}{2} \sqrt{\frac{3s(s+1)}{\pi}} \left\{ \begin{matrix} s & l_f & J_i \\ J_f & 1 & s \end{matrix} \right\} \Pi_{J_i s} \delta_{l_f l_i} \delta_{v_f v_i} C_{J_i M_i 1\mu}^{J_f M_f}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle J_f^{\pi_f} M_f l_f s v_f \left| M_{1\mu}^{M, l} \right| J_i^{\pi_i} M_i l_i s v_i \right\rangle = \\ & = \eta_1 \frac{3\mu_N}{a_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ a_3 \Sigma_{1, v_f-1} - \Sigma_{v_f-1} \right\} \Omega_2(1; (i), (f)) C_{J_i M_i 1\mu}^{J_f M_f}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь введены обозначения:

$$\zeta = 1, \quad g = g_n, \quad \Sigma_v = \Sigma_{3v}, \quad \{a_k\}_{k=1}^3 = \{98, 25, 16\} \quad \text{для } {}^4\text{He}+{}^3\text{He}; \quad (4.24)$$

$$\zeta = -1, \quad g = g_p, \quad \Sigma_v = \Sigma_{4v}, \quad \{a_k\}_{k=1}^3 = \{196, 34, 10\} \quad \text{для } {}^4\text{He}+{}^3\text{H};$$

$$\Omega_1(\lambda; (i), (f)) = \Pi_{J_i l_i} C_{l_i 0 \lambda 0}^{l_f 0} \left\{ \begin{matrix} l_i & s & J_i \\ J_f & \lambda & l_f \end{matrix} \right\} \left(\frac{\kappa_{v_f l_f}}{\kappa_{v_i l_i}} \delta_{v_f, v_i - \lambda} + \frac{\kappa_{v_i l_i}}{\kappa_{v_f l_f}} \delta_{v_f, v_i + \lambda} \right),$$

$$\Omega_2(\lambda; (i), (f)) = \Pi_{J_i l_i} \delta_{v_f v_i} \left\{ \begin{matrix} l_i & s & J_i \\ J_f & \lambda & l_f \end{matrix} \right\} \sum_l C_{l_f 0 10}^{l 0} C_{l_i 0 10}^{l 0} \left\{ \begin{matrix} 1 & \lambda & 1 \\ l_f & l & l_i \end{matrix} \right\} \frac{\varepsilon_{v_f-1}^l}{\kappa_{v_f l_f} \kappa_{v_i l_i}},$$

$$\Sigma_{iv} = \frac{2\pi}{v!} \sum_{k=1}^4 b_{ik} (\alpha_k)^v, \quad i = 1, \dots, 4,$$

$$\{b_{ik}\}_{i,k=1}^4 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -74 & 25 & 8 & 41 \\ -83 & 34 & 5 & 44 \end{bmatrix}, \quad \{\alpha_k\}_{k=1}^4 = \frac{1}{14} \{5, -2, -9, 12\},$$

$$\eta_{1(2)} = (-1)^{J_i(f) + l_f + s + 1}, \quad \Pi_{ab\dots c} = \sqrt{(2a+1)(2b+1)\dots(2c+1)}.$$

Из приведенных выражений следует, что матрицы операторов (2.29), (2.20) и (2.22) являются соответственно диагональной, двухдиагональной и трехдиагональной (якобиевской) по числу осцилляторных квантов.

4.3. Результаты расчетов и обсуждение

Явные выражения для парциальных астрофизических S -факторов реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ имеют вид, полностью аналогичный виду выражений для парциальных астрофизических S -факторов зеркальной реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ (3.105), (3.106), но со своими конкретными значениями энергий $E_{\text{пор}}$, E_G , ε и наборами коэффициентов разложения $C^{(д)}$, $C^{(н)}$. Так же, как и в случае зеркальной реакции, в расчетах характеристик реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ имеется два варьируемых параметра – r_0 и $g_{ц}$. Результаты расчетов фаз упругого рассеяния ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^3\text{H}$ и астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ при значениях этих параметров, оптимальных в расчетах для зеркальной реакции – $r_0 = 1.2$ фм, $g_{ц} = 1.035$, приведены на рисунках 4.2 и 4.3.

На рисунке 4.2 вместе с теоретическим расчетом представлены два набора данных по фазам $\delta_{1/2^+}$, $\delta_{3/2^+}$, $\delta_{5/2^+}$ упругого рассеяния ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^3\text{H}$ [156, 161], охватывающих диапазоны значений энергии $E_{ц.м.} = 1.6 \div 7.8$ МэВ, $1.8 \div 4.7$ МэВ соответственно для фазы $\delta_{1/2^+}$ и $E_{ц.м.} = 1.6 \div 7.8$ МэВ, $2.2 \div 4.7$ МэВ соответственно для фаз $\delta_{3/2^+}$, $\delta_{5/2^+}$. Из рисунка видно, что данные по фазовому сдвигу $\delta_{1/2^+}$ согласуются между собой при энергиях < 2.4 МэВ. При энергиях выше 2.4 МэВ данные [161] лежат ниже данных [156] особенно в интервале от 3 МэВ до 4.5 МэВ и между ними существует явное расхождение. Однако, при энергиях ~ 4.7 МэВ значения $\delta_{1/2^+}$ из [161] снова начинают согласовываться со значениями [156]. Значения фаз $\delta_{3/2^+}$ и $\delta_{5/2^+}$ из работы [161] полностью совпадают и лежат немного ниже значений из [156]. В целом, между фазами $\delta_{3/2^+}$, $\delta_{5/2^+}$ из работ [156] и [161] имеется согласие.

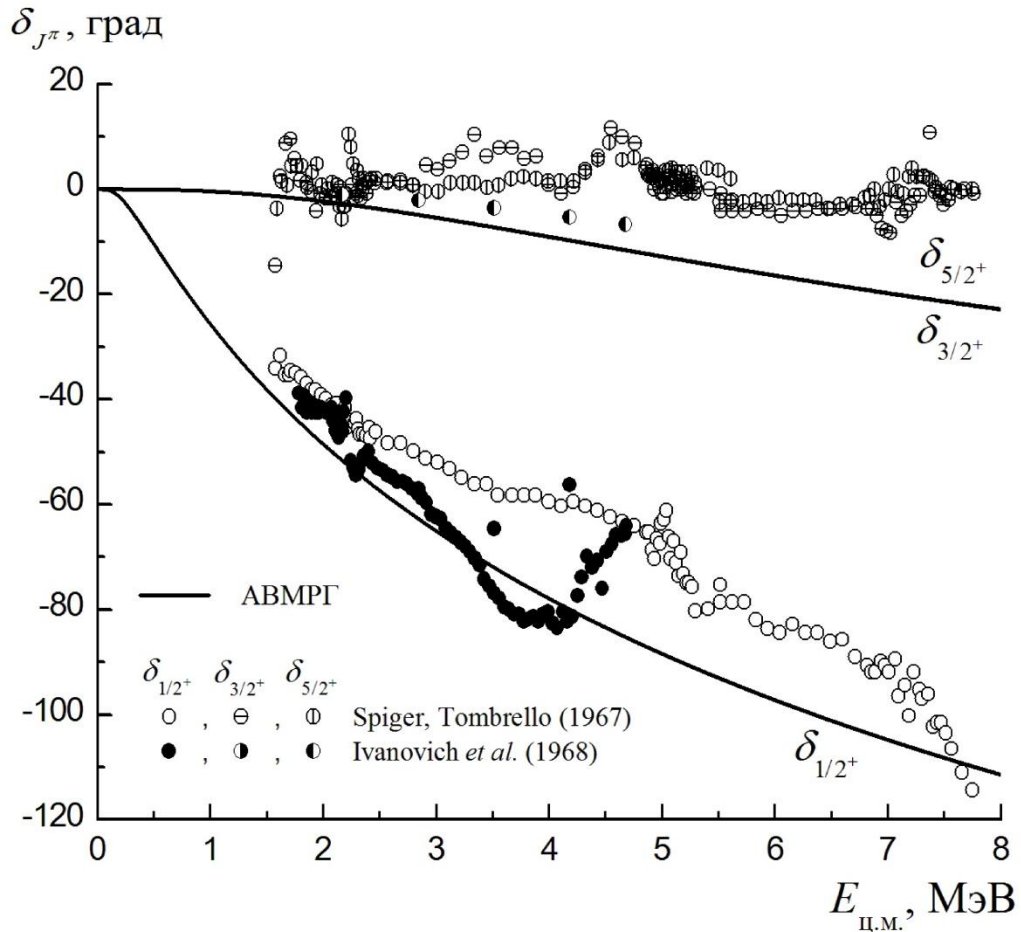


Рисунок 4.2. Фазы упругого рассеяния ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^3\text{H}$. Сплошные линии – расчет в рамках АВМРГ ($r_0 = 1.2$ фм, $g_u = 1.035$). Кружками отмечены данные из работ [156, 161]

Расчетные фазовые сдвиги $\delta_{3/2^+}$ и $\delta_{5/2^+}$, полученные в рамках АВМРГ, почти совпадают друг с другом и неразличимы на рисунке 4.2. Аналогичная ситуация имеет место и в случае упругого рассеяния ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^3\text{He}$. Эти фазовые сдвиги находятся в достаточно хорошем согласии с данными [156] вплоть до 2.8 МэВ, а с данными [161] во всем их диапазоне энергий (2.2÷4.7 МэВ). Расчетный фазовый сдвиг $\delta_{1/2^+}$ находится в хорошем соответствии с данными [161] вплоть до 4.2 МэВ. С данными [156] имеется вполне разумное соответствие при энергиях до 2.4 МэВ. Отклонение расчетных фаз от имеющихся данных при более высоких энергиях можно объяснить наличием других каналов реакции, которые учтены в данных [156, 161] и не рассматриваются в нашем одноканальном расчете. Например, при энергиях ≥ 4.7829 МэВ [148] наряду с упругим рассеянием гелия на тритии возможна реакция ${}^3\text{H}(\alpha, n){}^6\text{Li}$, а при энергиях ≥ 6.257 МэВ [148] – реакция

${}^3\text{H}(\alpha, \text{nd}){}^4\text{He}$. Так же, как и в случае упругого рассеяния ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^4\text{He}$, расчетные фазы упругого рассеяния ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^3\text{H}$ оказываются заниженными по сравнению с имеющимися данными [156, 161] в области энергий, где эти каналы являются открытыми.

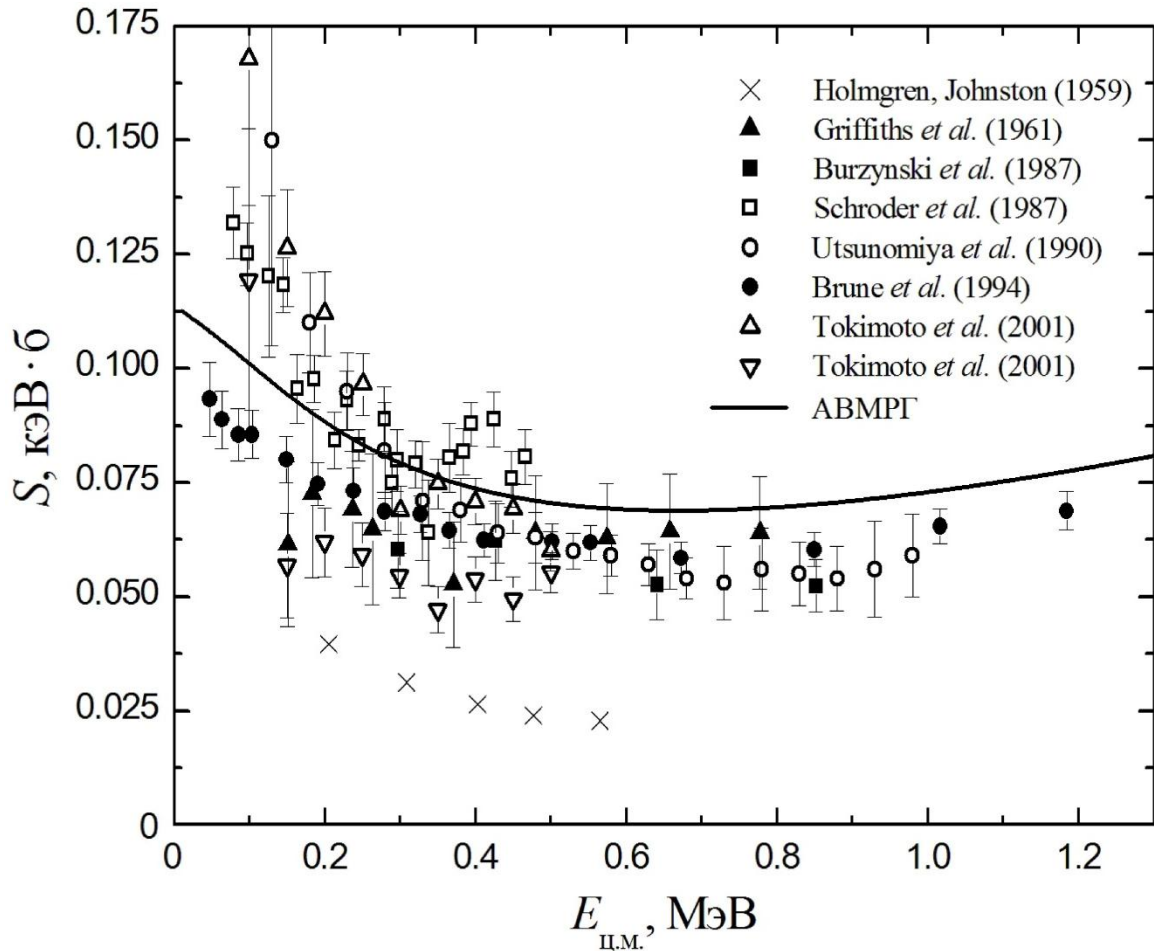


Рисунок 4.3. Астрофизический S -фактор реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$. Сплошная линия – расчет в рамках АВМРГ ($r_0 = 1.2$ фм, $g_u = 1.035$). Фигурками отмечены экспериментальные данные из работ [43, 50–55].

Из рисунка 4.3 видно, что энергетическое поведение расчетной кривой для S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ согласуется с энергетическим поведением данных [54], которые по сравнению с другими экспериментальными данными [43, 50–53, 55] являются наиболее точными и покрывают наиболее широкий диапазон энергий. Однако, количественно расчетный S -фактор лежит немного выше данных [54]. При этом он согласуется с данными [50]. Кроме того, полученный S -фактор имеет более плавное поведение, чем данные [52, 53, 55], особенно в обла-

сти энергий < 150 кэВ, что является определенным указанием на меньшую достоверность этих экспериментальных данных по сравнению с [50, 51, 54].

В таблице 4.1 приведены экспериментальные [148, 160] и расчетные значения энергий основных состояний α -частицы $E(^4\text{He})$, тритона $E(^3\text{H})$, основного $E(^7\text{Li})$ и первого возбужденного $E(^7\text{Li}^*)$ состояний ядра ^7Li , порога развала ^7Li на два кластера $\alpha + t$, а также разности $\varepsilon^{(\alpha+t)}$ последнего и энергии возбуждения первого возбужденного состояния ^7Li , полученные при тех же параметрах, что и S -фактор на рисунке 4.3.

Таблица 4.1. Энергии ядер ^4He , ^3H , ^7Li .

Энергия (МэВ)	$E(^4\text{He})$	$E(^3\text{H})$	$E(^7\text{Li})$	$E(^7\text{Li}^*)$	$E_{\text{пор}}^{(\alpha+t)}$	$\varepsilon^{(\alpha+t)}$
Эксперимент	-28.296	-8.482	-39.244	-38.766	2.467	1.989
Расчет	-26.703	-3.031	-31.569	-31.433	1.835	1.699

Между расчетными и экспериментальными значениями энергий из таблицы 4.1 имеется неплохое соответствие. Но расчетные значения несколько занижены по сравнению с экспериментальными. Данное поведение расчетных энергий полностью аналогично поведению расчетных энергий из таблицы 3.1 для ядер ^4He , ^3He и ^7Be . Способами устранения подобного расхождения, также как и в случае ядер ^3He , ^7Be , являются, по-видимому, использование более точной внутренней волновой функции для t -кластера и учет других кластерных конфигураций, например, $^6\text{Li} + n$ при описании ^7Li .

При значениях параметров $r_0 = 1.386$ фм, $g_{\text{ц}} = 1.021$ удается достичь очень хорошего описания [114] данных по S -фактору [54] (см. рисунки 4.4, 4.6), точного воспроизведения экспериментального значения энергии $E(^4\text{He})$, а также значительно улучшить расчетные значения энергий $E(^3\text{H})$, $E(^7\text{Li})$, $E(^7\text{Li}^*)$ (см. таблицу 4.2). Однако, при этом немного ухудшается описание данных по фазам (см. рисунок 4.5) и величинам $E_{\text{пор}}^{(\alpha+t)}$, $\varepsilon^{(\alpha+t)}$ (см. таблицу 4.2). На рисунках 4.4 и 4.5 изображены также расчетные кривые для фаз и S -фактора соответственно при $r_0 = 1.386$ фм и таких значениях $g_{\text{ц}}$, при которых удается точно воспроизвести одну из сле-

дующих величин: $E(^7\text{Li})$ ($g_{\text{ц}} = 0.91918$), $E(^7\text{Li}^*)$ ($g_{\text{ц}} = 0.9285$), $E_{\text{пор}}^{(\alpha+t)}$ ($g_{\text{ц}} = 0.9779$), $\varepsilon^{(\alpha+t)}$ ($g_{\text{ц}} = 0.9904$) (см. таблицу 4.2). При указанных параметрах кривые, изображающие энергетическую зависимость фаз $\delta_{1/2^+}$ и $\delta_{3/2^+}$, $\delta_{5/2^+}$ на рисунке 4.5, в особенности верхние пунктирные линии, а также рассчитанные значения энергий из таблицы 4.2 более точно воспроизводят имеющиеся данные, чем другие приведенные расчеты. Однако, кривые S -фактора при таких параметрах, изображенные на рисунке 4.4 пунктирными линиями (а)–(г), оказались завышенными по сравнению с экспериментальными данными. При этом нижняя пунктирная линия (д), соответствующая параметрам $r_0 = 1.386$ фм, $g_{\text{ц}} = 1.021$, гораздо лучше воспроизводит экспериментальные данные [54], чем сплошная линия, отвечающая оптимальным для зеркальной реакции параметрам.

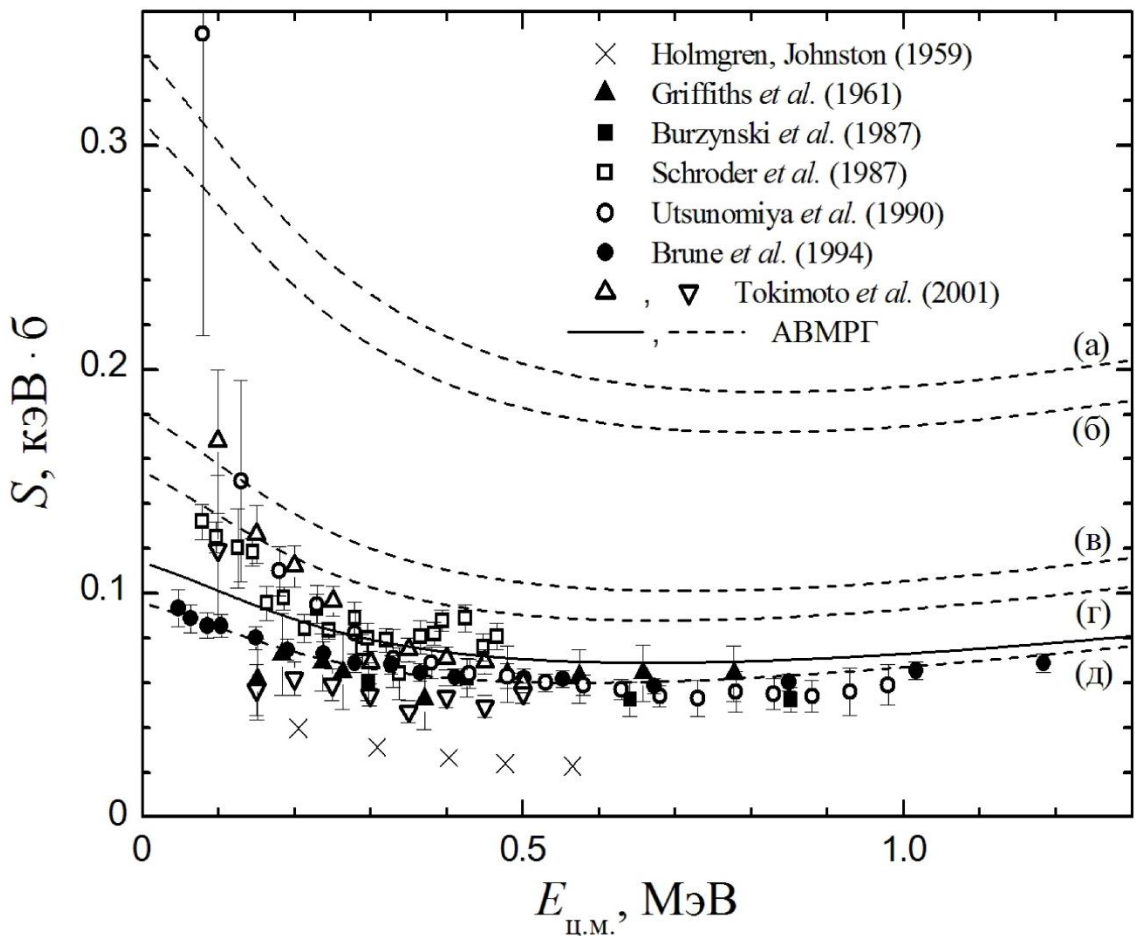


Рисунок 4.4. Астрофизический S -фактор реакции $^3\text{H}(\alpha, \gamma)^7\text{Li}$, вычисленный при различных значениях параметров модели. Пунктирные линии – расчет с $r_0 = 1.386$ фм и $g_{\text{ц}} = 0.91918$ (а), 0.9285 (б), 0.9779 (в), 0.9904 (г), 1.021 (д). Сплошная линия – расчет с $r_0 = 1.2$ фм и $g_{\text{ц}} = 1.035$.

Таблица 4.2. Энергии ядер ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}$ и ${}^7\text{Li}$, вычисленные при различных значениях параметра g_u .

Энергия, МэВ	Эксперимент	Расчет				
		$r_0 = 1.386$ фм				
		$g_u =$ 0.91918	$g_u =$ 0.9285	$g_u =$ 0.9779	$g_u =$ 0.9904	$g_u =$ 1.021
$E({}^4\text{He})$	-28.296	-28.296	-28.296	-28.296	-28.296	-28.296
$E({}^3\text{H})$	-8.482	-6.467	-6.467	-6.467	-6.467	-6.467
$E({}^7\text{Li})$	-39.244	-39.244	-38.899	-37.230	-36.851	-36.002
$E({}^7\text{Li}^*)$	-38.766	-39.105	-38.766	-37.124	-36.752	-35.920
$E_{\text{пор}}^{(\alpha+t)}$	2.467	4.481	4.137	2.467	2.088	1.239
$\varepsilon^{(\alpha+t)}$	1.989	4.342	4.003	2.361	1.989	1.157

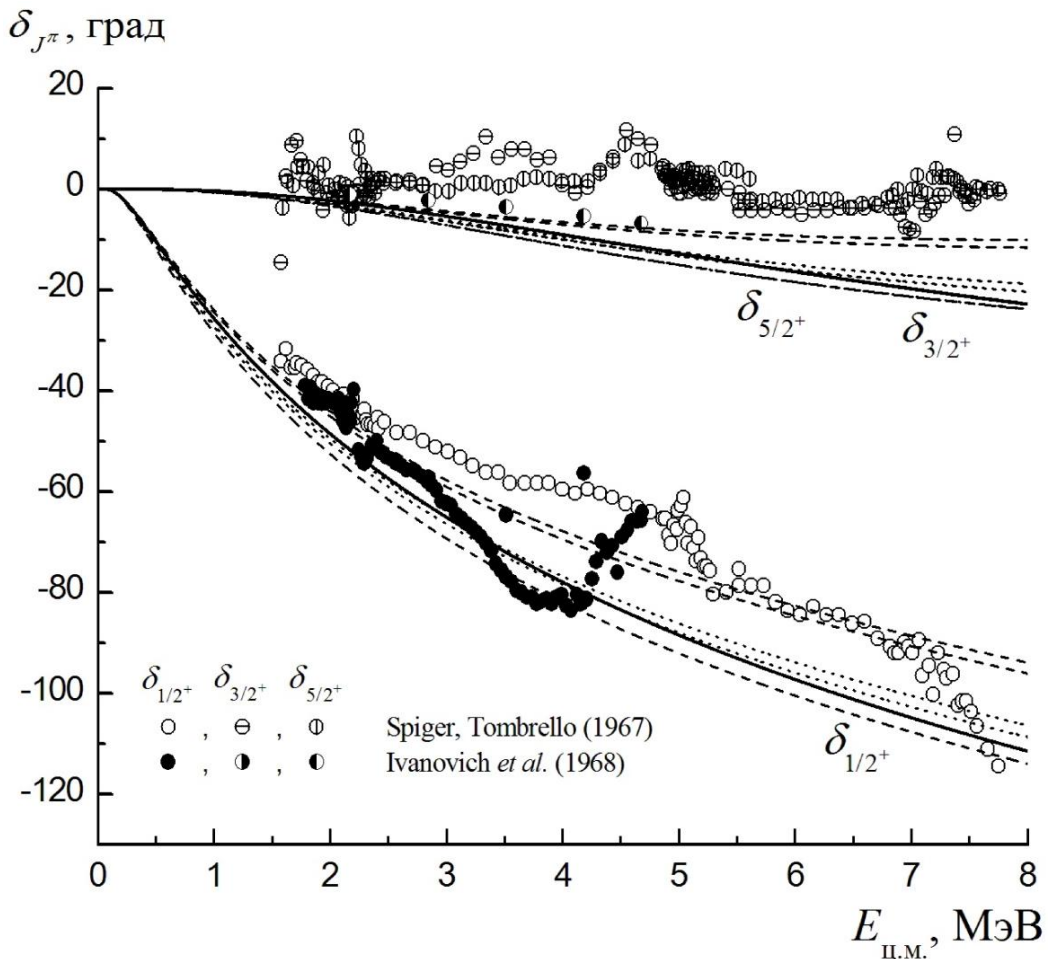


Рисунок 4.5. Фазы упругого рассеяния ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^3\text{H}$. Фаза $\delta_{1/2^+}$: верхняя, средняя и нижняя пунктирные линии – расчет с $r_0 = 1.386$ фм и $g_u = 0.91918, 0.9285, 1.021$ соответственно. Верхняя и нижняя точечная линии – расчет с $r_0 = 1.386$ фм и $g_u = 0.9779, 0.9904$ соответственно. Для фаз $\delta_{3/2^+}, \delta_{5/2^+}$ все аналогично. Сплошные линии и фигурки – см. рисунок 4.2.

Таким образом, оптимальными для реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ с точки зрения одновременного описания экспериментальных данных по S -фактору [54] и фаз упругого рассеяния ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^3\text{H}$ являются значения параметров $r_0 = 1.386$ фм и $g_{\text{ц}} = 1.021$ [114, 118]. Кроме того, при этих значениях параметров удается достичь неплохого соответствия со всей остальной совокупностью представленных данных. Следует также отметить, что оптимальные для зеркальной реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ параметры $r_0 = 1.2$ фм и $g_{\text{ц}} = 1.035$ тоже дают достаточно разумное описание реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$.

На рисунке 4.6 показаны парциальные S -факторы реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$. Сравнение полного S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ и S -факторов захвата в системе $\alpha + t$ с образованием ${}^7\text{Li}$ в основном S_0 и первом возбужденном S_1 состояниях с наиболее точными на данный момент и покрывающими наиболее широкий диапазон энергий экспериментальными данными [54] демонстрирует очень хорошее согласие.

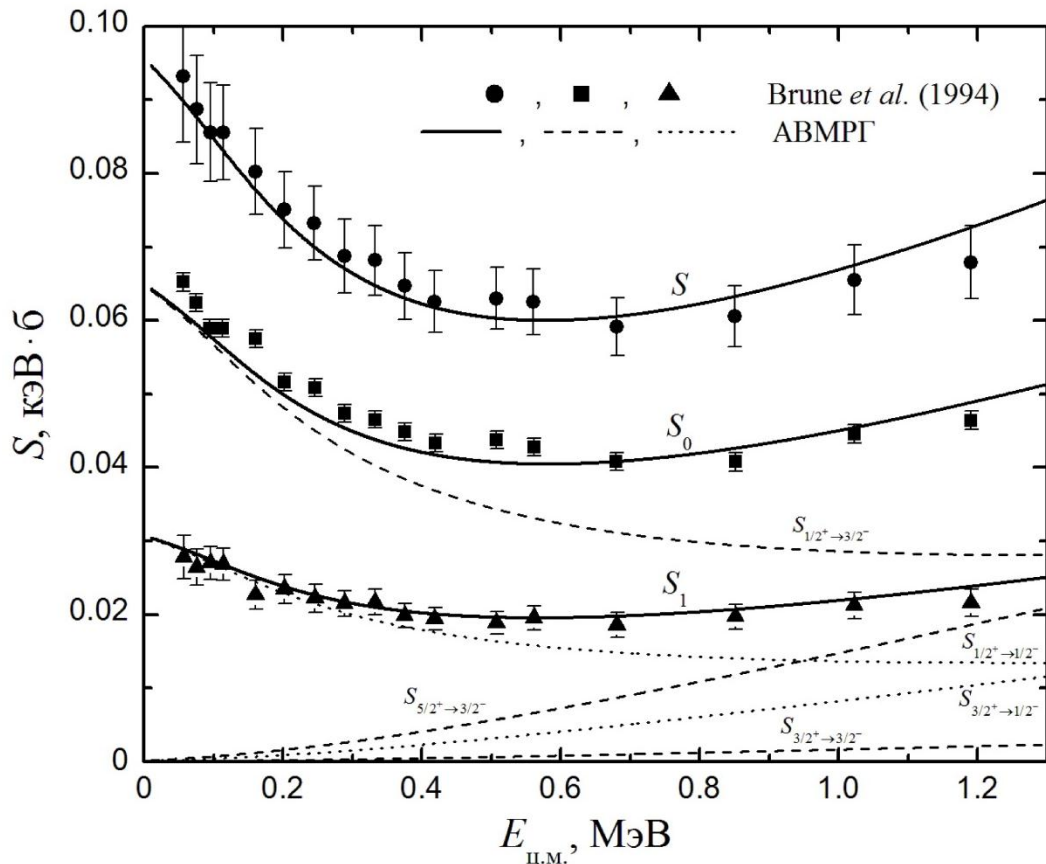


Рисунок 4.6. Парциальные S -факторы реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$. Кривые – расчет с $r_0 = 1.386$ фм и $g_{\text{ц}} = 1.021$. Кружки, квадраты, треугольники – экспериментальные данные [54] для S , S_0 , S_1 .

Как и в случае зеркальной реакции, S_0 для реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ более чем в два раза превосходит по величине S_1 . В окрестности нулевой энергии почти до 100 кэВ при описании полного S -фактора можно ограничиться только учетом радиационного захвата в системе $\alpha + t$, находящейся в S -состояниях рассеяния. Вклад захвата в системе $\alpha + t$, находящейся в D -состояниях рассеяния, начинает играть существенную роль с энергий ~ 1 МэВ.

Расчетный коэффициент ветвления реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ при различных значениях параметров модели изображен на рисунке 4.7 [118].

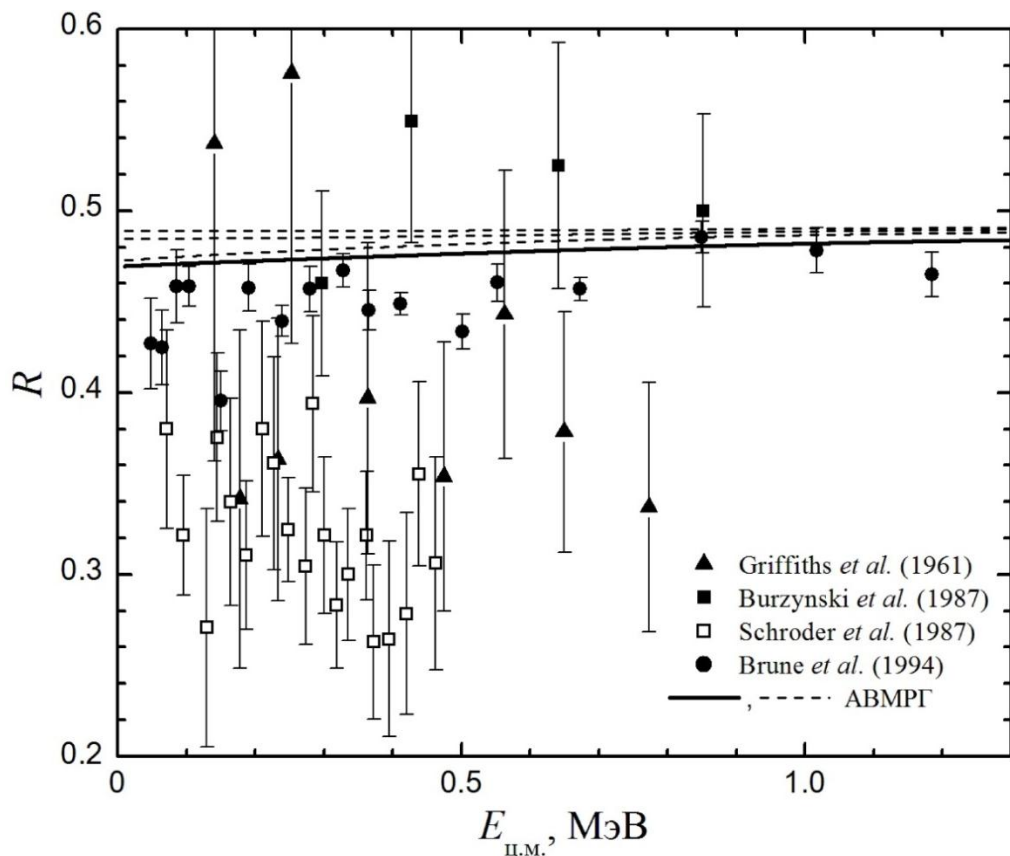


Рисунок 4.7. Коэффициент ветвления реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$. Сплошная линия – расчет с $r_0 = 1.2$ фм, $g_4 = 1.035$. Верхняя, средняя, нижняя пунктирные линии – расчет с $r_0 = 1.386$ фм, $g_4 = 0.91918, 0.9779, 1.021$ соответственно. Фигурки – экспериментальные данные [50–52, 54].

В указанном диапазоне энергий коэффициент ветвления R очень слабо меняется с изменением энергии. Из рисунка 4.7 видно, что расчетный коэффициент ветвления лежит несколько выше данных [52], но при этом достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными [50, 51, 54], как и S -фактор. По срав-

нению с S -фактором R проявляет весьма слабую чувствительность к параметрам модели. Нижняя пунктирная и сплошная кривые R , отвечающие оптимальным для рассматриваемых реакций параметрам, демонстрируют схожую энергетическую зависимость, но сплошная линия лежит немного ниже. Обе эти кривые гораздо лучше согласуются с экспериментальными данными, чем другие представленные кривые.

На рисунках 4.8 и 4.9 сравнивается астрофизический S -фактор реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, вычисленный нами в настоящей работе в рамках АВМРГ, с наиболее современными микроскопическими [102, 103, 110], а также полумикроскопическими расчетами [106, 108], и микроскопическими расчетами, основанными на МРГ [96–98, 100, 102, 103], соответственно.

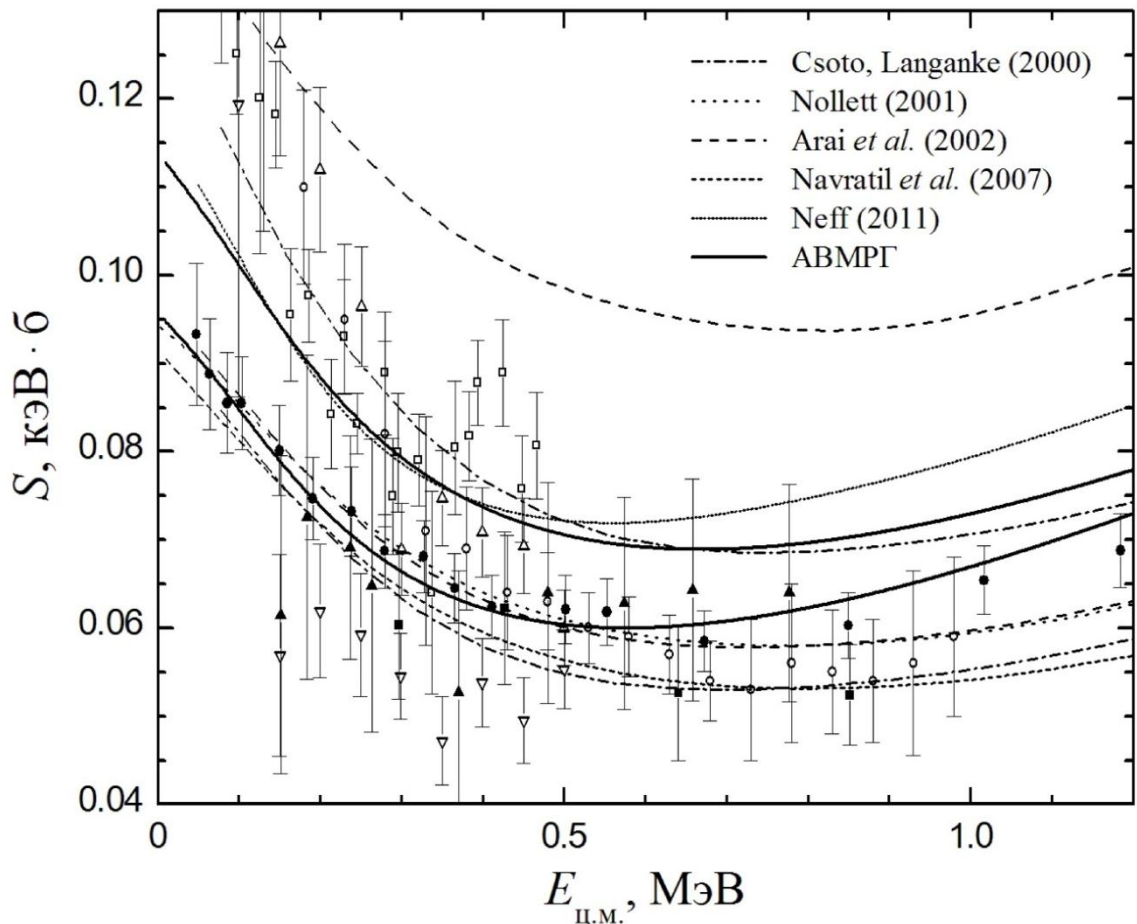


Рисунок 4.8. Сравнение астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, вычисленного в рамках АВМРГ (верхняя сплошная линия – расчет с $r_0 = 1.2$ фм, $g_\gamma = 1.035$; нижняя сплошная линия – расчет с $r_0 = 1.386$ фм, $g_\gamma = 1.021$), с наиболее современными микроскопическими [102, 103, 110] и полумикроскопическими [106, 108] расчетами. Фигурками отмечены экспериментальные данные (см. рисунок 4.3).

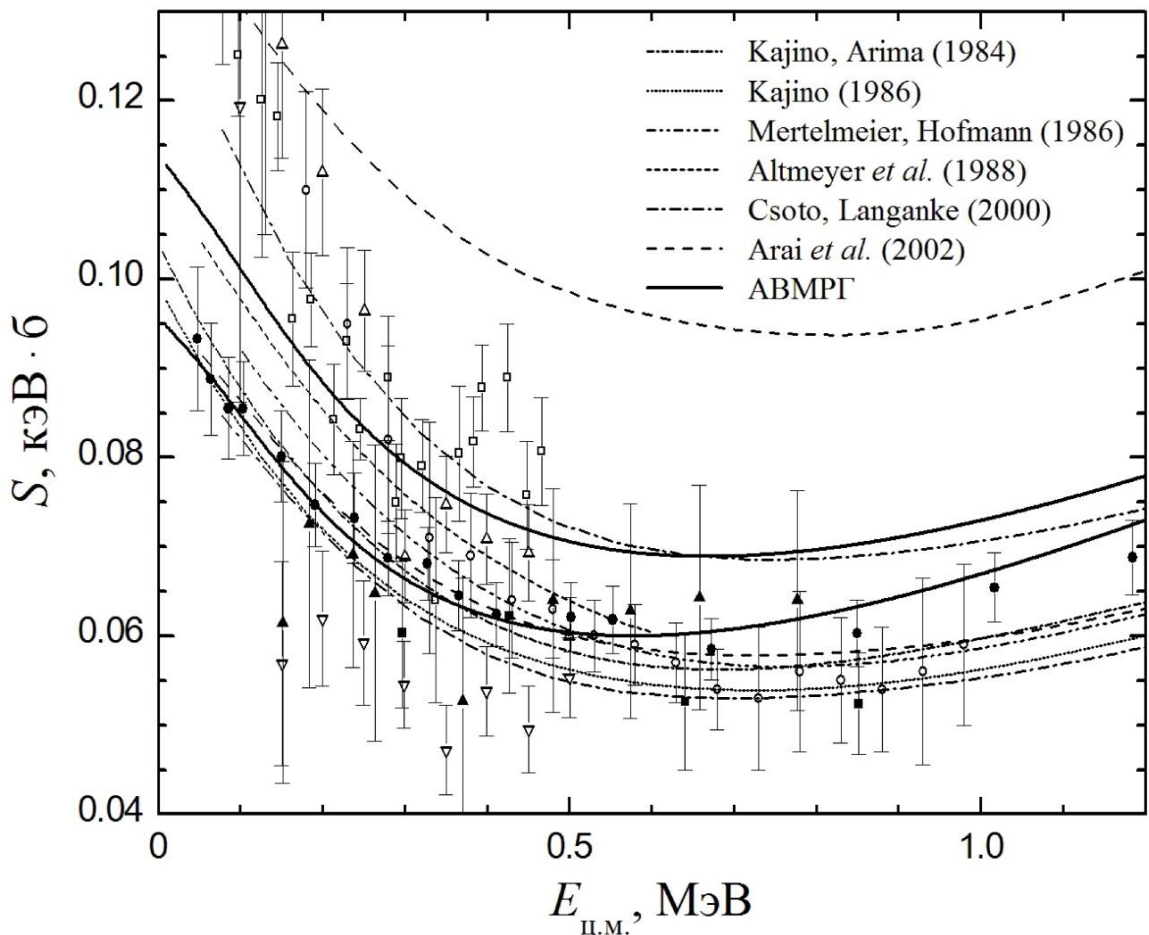


Рисунок 4.9. Сравнение астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, вычисленного в рамках АВМРГ (верхняя сплошная линия – расчет с $r_0 = 1.2$ фм, $g_\gamma = 1.035$; нижняя сплошная линия – расчет с $r_0 = 1.386$ фм, $g_\gamma = 1.021$), с расчетами, базирующимися на МРГ [96–98, 100, 102, 103]. Фигурками отмечены экспериментальные данные (см. рисунок 4.3).

Многоканальные расчеты из работ [102, 103] (верхние пунктирно-точечная и утолщенная пунктирная кривые соответственно на рисунке 4.8), учитывающие также кластерную конфигурацию ${}^6\text{Li} + n$, лежат выше наиболее точных на данный момент и покрывающих наиболее широкий диапазон энергий экспериментальных данных [54]. При этом многоканальный расчет [102] достаточно неплохо согласуется с данными [52]. В свою очередь, одноканальный расчет [102] (нижняя пунктирно-точечная кривая на рисунке 4.8) согласуется с данными [54] вплоть до 0.4 МэВ, но при более высоких энергиях отклоняется вниз. Этот расчет также согласуется с полумикроскопическим расчетом [108]. Одноканальный расчет [103] (нижняя утолщенная пунктирная кривая на рисунке 4.8) согласуется с экспериментальными данными [54] вплоть до 1 МэВ и полумикроскопическим расчетом

[106]. Качественно S -факторы из работ [102, 103, 106, 108] согласуются друг с другом, но количественно S -факторы [103, 106] лежат ближе к экспериментальным данным [54].

Наш расчет в рамках АВМРГ с параметрами $r_0 = 1.2$ фм, $g_{\text{ц}} = 1.035$ (верхняя сплошная линия на рисунке 4.8) и *ab initio* расчет [110] лежат несколько выше данных [54] и согласуются друг с другом вплоть до 0.4 МэВ. При больших энергиях *ab initio* расчет [110] отклоняется вверх от экспериментальных данных и нашего расчета. Другой наш расчет с параметрами $r_0 = 1.386$ фм, $g_{\text{ц}} = 1.021$ (нижняя сплошная линия) очень хорошо согласуется с данными [54] во всем диапазоне энергий.

Из рисунка 4.9 видно, что расчеты [96–98] и одноканальные расчеты [102, 103] находятся в достаточно неплохом соответствии друг с другом. Однако, расчеты [98, 102] согласуются с данными [54] только до энергий ~ 0.4 МэВ, а расчеты [96, 97, 103] – до энергий ~ 1 МэВ. При более высоких энергиях соответствующие этим расчетам кривые лежат несколько ниже данных [54].

Таким образом, реализованный нами расчет астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ в рамках АВМРГ наилучшим образом согласуется с наиболее достоверными на данный момент экспериментальными данными [54] по сравнению с другими микроскопическими и полумикроскопическими расчетами. Аналогичная ситуация имеет место и в случае зеркальной реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. При этом точно так же, как и в случае расчетов S -фактора зеркальной реакции, между расчетами S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ существует значительный разброс, причина которого также до сих пор не ясна.

Заключение

Основные научные результаты настоящей диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Впервые получены явные аналитические выражения для матричных элементов наиболее важных электрических дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного операторов в базисе волновых функций АВМРГ для семинуклонных систем ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$. Показано, что для обеих систем матрицы соответствующих операторов в осцилляторном представлении имеют двухдиагональный, трехдиагональный и диагональный вид по числу осцилляторных квантов, создающий значительные удобства при вычислении астрофизических S -факторов реакций радиационного захвата в этих кластерных системах.
2. Впервые в рамках АВМРГ вычислены парциальные и суммарный астрофизические S -факторы, а также коэффициент ветвления реакции радиационного захвата ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ при низких и средних энергиях. Интерпретированы экспериментальные данные по этим величинам во всем диапазоне энергий, доступном для измерений, а также предсказано их поведение в недоступной для эксперимента области энергий.
3. Впервые на основе АВМРГ вычислены парциальные и суммарный астрофизические S -факторы, а также коэффициент ветвления реакции радиационного захвата ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ при низких и средних энергиях. Представлена интерпретация экспериментальных данных по вычисленным величинам и предсказано их поведение в недоступном для измерений диапазоне энергий.
4. Проведено сравнение астрофизических S -факторов реакций ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, полученных в рамках АВМРГ, с результатами других микроскопи-

ческих и полумикроскопических расчетов. Показано, что астрофизические S -факторы этих реакций, вычисленные с использованием АВМРГ, наилучшим образом описывают наиболее точные экспериментальные данные по сравнению с результатами других расчетов. Вместе с этим получено хорошее описание коэффициентов ветвления указанных реакций, фаз упругого рассеяния в системах ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$, ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ и достаточно разумное согласие с экспериментальными значениями энергий входящих в реакции ядер.

5. Установлено, что использование в расчетах волновых функций нижайших, разрешенных принципом Паули, состояний трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек в качестве внутренних волновых функций кластеров ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}$, ${}^3\text{H}$ и описание структуры ядер ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$ посредством кластерных конфигураций ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ соответственно в дискретном спектре с модифицированным нуклон-нуклонным потенциалом Хазегавы–Нагаты позволяет одновременно описывать данные по фазам упругого рассеяния вместе с данными по астрофизическим S -факторам и коэффициентам ветвления реакций радиационного захвата в зеркальных кластерных системах ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$. В то же время расчетные значения энергий основных состояний ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$, а также первых возбужденных состояний ядер ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$ несколько отклоняются от соответствующих экспериментальных значений, что является характерной чертой МРГ. Отмечены возможные пути решения данной проблемы и уточнения результатов расчета.

Разработанная методика вычисления матричных элементов наиболее важных электромагнитных мультипольных операторов на базисных волновых функциях АВМРГ может быть использована и в других моделях, основанных на разложениях по базису осцилляторных функций, для получения явных выражений для матричных элементов этих операторов в осцилляторном представлении.

Разработанный подход к описанию реакций радиационного захвата, опирающийся на АВМРГ, весьма эффективен для расчета их сечений, астрофизических S -факторов и коэффициентов ветвления при низких и средних энергиях. Досто-

верный формализм АВМРГ в совокупности с надежной и относительно простой численной реализацией открывают перспективы применения данного подхода и в области сверхнизких энергий, где использование других микроскопических подходов крайне затруднительно.

Результаты расчетов реакций ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ и ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, хорошо описывающие экспериментальные данные по этим реакциям и покрывающие недоступный для эксперимента диапазон астрофизически важных энергий, могут быть использованы как входные данные в расчетах кинетики астрофизических и других процессов, для извлечения данных по сечениям соответствующих фотоядерных реакций, а также для оценки результатов возможных будущих экспериментов.

В заключение я хотел бы выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю Сергею Юрьевичу Игашову за неоценимую помощь и поддержку в процессе работы. Также я выражаю глубокую признательность Юрию Михайловичу Чувильскому, ведущему научному сотруднику Научно-исследовательского института ядерной физики имени Д.В. Скобельцына МГУ имени М.В. Ломоносова, за плодотворное сотрудничество, конструктивное обсуждение многих вопросов, затронутых в диссертации, и постоянный интерес к работе. Они являются соавторами моих печатных работ, на которых основана диссертация. Работа с С.Ю. Игашовым и Ю.М. Чувильским приносила и продолжает приносить мне новые знания. Хотелось бы также отметить поддержку и понимание со стороны Сергея Евгеньевича Куратова, начальника Центра фундаментальных и прикладных исследований ВНИИА имени Н.Л. Духова, и Александра Викторовича Андрияша, научного руководителя ВНИИА имени Н.Л. Духова.

Литература

1. E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler, and F. Hoyle, Synthesis of the elements in stars, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 547–654 (1957).
2. У. А. Фаулер, Экспериментальная и теоретическая ядерная астрофизика, поиски происхождения элементов, *УФН* **145**, 441–488 (1985).
3. В. А. Бедняков, О происхождении химических элементов, *ЭЧАЯ* **33**, 914–963 (2002).
4. J. A. Wheeler, Molecular viewpoints in nuclear structure, *Phys. Rev.* **52**, 1083–1106, (1937).
5. J. A. Wheeler, On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure, *Phys. Rev.* **52**, 1107–1122 (1937).
6. Y. C. Tang, M. Lemere, and D. R. Thompson, Resonating-group method for nuclear many-body problems, *Phys. Rep.* **47**, 167–223 (1978).
7. К. Вильдермут, Я. Тан, *Единая теория ядра* (пер. с англ. Мир, Москва, 1980).
8. Г. Ф. Филиппов, И. П. Охрименко, О возможности использования осцилляторного базиса для решения задач непрерывного спектра, *ЯФ* **32**, 932–939 (1980).
9. Г. Ф. Филиппов, Об учете правильной асимптотики в разложениях по осцилляторному базису, *ЯФ* **33**, 928–931 (1981).
10. М. Мошинский, *Гармонический осциллятор в современной физике: от атомов до кварков* (пер. с англ. Мир, Москва, 1972).

11. M. Moshinsky and Yu. F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics* (Harwood academic publishers, Amsterdam, 1996).
12. В. Г. Неудачин, Ю. Ф. Смирнов, *Нуклонные ассоциации в легких ядрах* (Наука, Москва, 1969).
13. О. Ф. Немец, В. Г. Неудачин, А. Т. Рудчик и др., *Нуклонные ассоциации в атомных ядрах и ядерные реакции многонуклонных передач* (Наукова Думка, Киев, 1988).
14. *The J-Matrix Method. Developments and Applications*, ed. A. D. Alhaidari, E. J. Heller, H. A. Yamani, and M. S. Abdelmonem (Springer, Berlin, 2008).
15. I. P. Okhrimenko, Allowance for the Coulomb interaction in the framework of an algebraic version of the resonating group method, *Nucl. Phys. A* **424**, 121–142 (1984).
16. Г. Ф. Филиппов, В. С. Василевский, Л. Л. Чоповский, Обобщенные когерентные состояния в задачах ядерной физики, *ЭЧАЯ* **15**, 1338–1385 (1984).
17. Г. Ф. Филиппов, В. С. Василевский, Л. Л. Чоповский, Решение задач микроскопической теории ядра на основе техники обобщенных когерентных состояний, *ЭЧАЯ* **16**, 349–406 (1985).
18. И. П. Охрименко, Исследование резонансов $N + \alpha$ -системы в осцилляторном представлении метода резонирующих групп, *ЯФ* **44**, 320–329 (1986).
19. В. С. Василевский, И. Ф. Гутич, И. П. Охрименко, Расчет сечения реакции $d(t, n)\alpha$ и параметров $3/2^+$ резонанса ядра ${}^5\text{He}$, *ЯФ* **46**, 757–770 (1987).
20. I. P. Okhrimenko, Calculation of quasi-stationary state parameters within the algebraic version of the resonating-group method, *Few-Body Syst.* **2**, 169–182 (1987).
21. И. Ф. Гутич, И. П. Охрименко, Расчет сечения зеркальных ядерных реакций $d({}^3\text{H}, n)\alpha$ и $d({}^3\text{He}, p)\alpha$ в области подбарьерных энергий, *ЯФ* **47**, 1238–1245

- (1988).
22. В. С. Василевский, Т. П. Коваленко, Г. Ф. Филиппов, Многоканальная теория 0^+ -резонанса ${}^4\text{He}$, ЯФ **48**, 346–357 (1988).
 23. Р. Т. Тяпаев, Расчет полного сечения реакции $d(t, n)\alpha$ в области энергий налетающих дейтронов от порога до 5 МэВ, ЯФ **56**, 168–183 (1993).
 24. V. S. Vasilevsky and F. Arickx, Algebraic model for quantum scattering: reformulation, analysis, and numerical strategies, Phys. Rev. A **55**, 265–286 (1997).
 25. С. Ю. Игашов, Исследование $5/2^-$ резонанса системы ${}^6\text{Li} + p$ в осцилляторном представлении метода резонирующих групп, Изв. РАН. Сер. физ. **61**, 812–816 (1997).
 26. С. Ю. Игашов, Исследование процессов рассеяния и реакций в системе ${}^6\text{Li} + n$, Изв. РАН. Сер. физ. **65**, 756–760 (2001).
 27. A. Sytcheva, F. Arickx, J. Broeckhove, and V. S. Vasilevsky, Monopole and quadrupole polarization effects on the α -particle description of ${}^8\text{Be}$, Phys. Rev. C **71**, 044322(1–10) (2005).
 28. G. F. Filippov, A. V. Nesterov, I. Yu. Rybkin, and S. V. Korennov, The realization of the resonating group method algebraic version for three-cluster systems, ЭЧАЯ **25**, 1347–1378 (1994).
 29. V. Vasilevsky, A. V. Nesterov, F. Arickx, and J. Broeckhove, Algebraic model for scattering in three- s -cluster systems. I. Theoretical background, Phys. Rev. C **63**, 034606(1–16) (2001).
 30. V. Vasilevsky, A. V. Nesterov, F. Arickx, and J. Broeckhove, Algebraic model for scattering in three- s -cluster systems. II. Resonances in three-cluster continuum of ${}^6\text{He}$ and ${}^6\text{Be}$, Phys. Rev. C **63**, 034607(1–7) (2001).
 31. V. Vasilevsky, A. V. Nesterov, F. Arickx, and J. Broeckhove, S factor of the

- ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ and ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ reactions using a three-cluster exit channel, *Phys. Rev. C* **63**, 064604(1–8) (2001).
32. V. S. Vasilevsky, F. Arickx, J. Broeckhove, and T. P. Kovalenko, A microscopic three-cluster model with nuclear polarization applied to the resonances of ${}^7\text{Be}$ and the reaction ${}^6\text{Li}(p, {}^3\text{He}){}^4\text{He}$, *Nucl. Phys. A* **824**, 37–57 (2009).
33. Yu. A. Lashko and G. F. Filippov, The role of the Pauli principle in three-cluster systems composed of identical clusters, *Nucl. Phys. A* **826**, 24–48 (2009).
34. А. В. Нестеров, Ф. Арикс, Я. Брукхов, В. С. Василевский, Трехкластерное описание свойств легких нейтронно- и протонно-избыточных ядер в рамках алгебраической версии метода резонирующих групп, *ЭЧАЯ* **41**, 1335–1424 (2010).
35. W. A. Fowler, G. R. Caughlan, and B. A. Zimmerman, Thermonuclear reaction rates, *Ann. Rev. Astr. Astrophys.* **5**, 525–570 (1967).
36. W. A. Fowler, G. R. Caughlan, and B. A. Zimmerman, Thermonuclear reaction rates II, *Ann. Rev. Astr. Astrophys.* **13**, 69–112 (1975).
37. G. R. Caughlan and W. A. Fowler, Thermonuclear reaction rates V, *At. Data Nucl. Data Tables.* **40**, 283–334 (1988).
38. E. G. Adelberger, S. M. Austin, J. N. Bahcall *et al.*, Solar fusion cross sections, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1265–1291 (1998).
39. C. Angulo, M. Arnould, M. Rayet *et al.*, A compilation of charged-particle induced thermonuclear reaction rates, *Nucl. Phys. A* **656**, 3–183 (1999).
40. P. Descouvemont, A. Adahchour, C. Angulo *et al.*, Compilation and *R*-matrix analysis of Big Bang nuclear reaction rates, *At. Data Nucl. Data Tables.* **88**, 203–236 (2004).
41. E. G. Adelberger, A. García, R. G. H. Robertson *et al.*, Solar fusion cross sections.

- II. The pp chain and CNO cycles, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 195–245 (2011).
42. Y. Xu, K. Takahashi, S. Goriely *et al.*, NACRE II: an update of the NACRE compilation of charged-particle-induced thermonuclear reaction rates for nuclei with mass number $A < 16$, *Nucl. Phys. A* **918**, 61–169 (2013).
43. H. D. Holmgren and R. L. Johnston, $H^3(\alpha, \gamma)Li^7$ and $He^3(\alpha, \gamma)Be^7$ reactions, *Phys. Rev.* **113**, 1556–1559 (1959).
44. E. E. Salpeter, Nuclear reactions in the stars. I. Proton-proton chain, *Phys. Rev.* **88**, 547–553 (1952).
45. B. Aharmim, S. N. Ahmed, J. F. Amsbaugh *et al.*, Independent measurement of the total active 8B solar neutrino flux using an array of 3He proportional counters at the Sudbury Neutrino Observatory, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 111301(1–5) (2008).
46. G. Bellini, J. Benziger, D. Bick *et al.*, Precision measurement of the 7Be solar neutrino interaction rate in Borexino, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 141302(1–5) (2011).
47. S. Abe, K. Furuno, A. Gando *et al.*, Measurement of the 8B solar neutrino flux with the KamLAND liquid scintillator detector, *Phys. Rev. C* **84**, 035804(1–6) (2011).
48. J. N. Bahcall, A. M. Serenelli, and S. Basu, 10,000 standard solar models: a Monte Carlo simulation, *Astrophys. J. Suppl.* **165**, 400–431 (2006).
49. F. Iocco, G. Mangano, G. Miele *et al.*, Primordial nucleosynthesis: from precision cosmology to fundamental physics, *Phys. Rep.* **472**, 1–76 (2009).
50. G. M. Griffiths, R. A. Morrow, P. J. Riley, and J. B. Warren, The $T(\alpha, \gamma)Li^7$ reaction, *Can. J. Phys.* **39**, 1397–1408 (1961).
51. S. Burzyński, K. Czerski, A. Marcinkowski, and P. Zupranski, The $^3H(\alpha, \gamma)^7Li$ reaction in the energy range from 0.7 to 2.0 MeV, *Nucl. Phys. A* **473**, 179–188 (1987).
52. U. Schröder, A. Redder, C. Rolfs *et al.*, Astrophysical S factor of $^3H(\alpha, \gamma)^7Li$, *Phys.*

Lett. B **192**, 55–58 (1987).

53. H. Utsunomiya, Y.-W. Lui, D. R. Haenni *et al.*, Breakup of ${}^7\text{Li}$ near the α - t threshold and a possible probe of radiative-capture processes, Phys. Rev. Lett. **65**, 847–850 (1990).

H. Utsunomiya, Y.-W. Lui, D. R. Haenni *et al.*, Breakup of ${}^7\text{Li}$ near the α - t threshold and a possible probe of radiative-capture processes, Phys. Rev. Lett. **69**, 863(E) (1992).

54. C. R. Brune, R. W. Kavanagh, and C. Rolfs, ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ reaction at low energies, Phys. Rev. C **50**, 2205–2218 (1994).

55. Y. Tokimoto, H. Utsunomiya, T. Yamagata *et al.*, Coulomb breakup of ${}^7\text{Li}$ for nuclear astrophysics, Phys. Rev. C **63**, 035801(1–20) (2001).

56. P. D. Parker and R. W. Kavanagh, $\text{He}^3(\alpha, \gamma)\text{Be}^7$ reaction, Phys. Rev. **131**, 2578–2582 (1963).

57. K. Nagatani, M. R. Dwarakanath, and D. Ashery, The ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ reaction at very low energy, Nucl. Phys. A **128**, 325–332 (1969).

58. H. Kräwinkel, H. W. Becker, L. Buchmann *et al.*, The ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ reaction and the solar neutrino problem, Z. Phys. A **304**, 307–332 (1982).

59. T. K. Alexander, G. C. Ball, W. N. Lennard *et al.*, Measurement of the absolute cross section of the ${}^3\text{He}({}^4\text{He}, \gamma){}^7\text{Be}$ reaction at $E_{\text{c.m.}} = 525 \text{ keV}$, Nucl. Phys. A **427**, 526–544 (1984).

60. R. G. H. Robertson, P. Dyer, T. J. Bowles *et al.*, Cross section of the capture reaction ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, Phys. Rev. C **27**, 11–17 (1983).

61. H. Volk, H. Kräwinkel, R. Santo, and L. Wallek, Activation measurement of the ${}^3\text{He}({}^4\text{He}, \gamma){}^7\text{Be}$ reaction, Z. Phys. A **310**, 91–94 (1983).

62. J. L. Osborne, C. A. Barnes, R. W. Kavanagh *et al.*, Low-energy ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ cross-section measurements, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1664–1666 (1982).
- J. L. Osborne, C. A. Barnes, R. W. Kavanagh *et al.*, Low-energy behavior of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ cross section, *Nucl. Phys. A* **419**, 115–132 (1984).
63. M. Hilgemeier, H. W. Becker, C. Rolfs *et al.*, Absolute cross section of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ reaction, *Z. Phys. A* **329**, 243–254 (1988).
64. B. S. Nara Singh, M. Hass, Y. Nir-El, and G. Haquin, New precision measurement of the ${}^3\text{He}({}^4\text{He}, \gamma){}^7\text{Be}$ cross section, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 262503(1–4) (2004).
65. M. Carmona-Gallardo, B. S. Nara Singh, M. J. G. Borge *et al.*, New measurement of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ cross section at medium energies, *Phys. Rev. C* **86**, 032801(R)(1–5) (2012).
66. C. Bordeanu, Gy. Gyürky, Z. Halász *et al.*, Activation measurement of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ reaction cross section at high energies, *Nucl. Phys. A* **908**, 1–11 (2013).
67. A. Kontos, E. Uberseder, R. deBoer *et al.*, Astrophysical S factor of ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, *Phys. Rev. C* **87**, 065804(1–9) (2013).
68. T. A. D. Brown, C. Bordeanu, K. A. Snover *et al.*, ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be}$ astrophysical S factor, *Phys. Rev. C* **76**, 055801(1–12) (2007).
69. M. Carmona-Gallardo, A. Rojas, M. J. G. Borge *et al.*, ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ cross section measured using complementary techniques, *Eur. Phys. J. Web Conf.* **66**, 07003(1–4) (2014).
70. D. Bemmerer, F. Confortola, H. Costantini *et al.*, Activation measurement of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ cross section at low energy, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 122502(1–5) (2006).
71. Gy. Gyürky, F. Confortola, H. Costantini *et al.*, ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ cross section at low

- energies, Phys. Rev. C **75**, 035805(1–8) (2007).
72. F. Confortola, D. Bemmerer, H. Costantini *et al.*, Astrophysical S factor of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ reaction measured at low energy via detection of prompt and delayed γ rays, Phys. Rev. C **75**, 065803(1–4) (2007).
73. H. Costantini, D. Bemmerer, F. Confortola *et al.*, The ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ S-factor at solar energies: the prompt γ experiment at LUNA, Nucl. Phys. A **814**, 144–158 (2008).
74. A. Di Leva, L. Gialanella, R. Kunz *et al.*, Stellar and primordial nucleosynthesis of ${}^7\text{Be}$: measurement of ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, Phys. Rev. Lett. **102**, 232502(1–4) (2009).
- A. Di Leva, L. Gialanella, R. Kunz *et al.*, Stellar and primordial nucleosynthesis of ${}^7\text{Be}$: measurement of ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, Phys. Rev. Lett. **103**, 159903(E)(1) (2009).
75. R. F. Christy and I. Duck, γ rays from an extranuclear direct capture process, Nucl. Phys. **24**, 89–101 (1961).
76. T. A. Tombrello and G. C. Phillips, Cluster nature of Li^7 and Be^7 , Phys. Rev. **122**, 224–228 (1961).
77. T. A. Tombrello and P. D. Parker, Direct-capture model for the $\text{He}^3(\alpha, \gamma)\text{Be}^7$ and $\text{T}(\alpha, \gamma)\text{Li}^7$ reactions, Phys. Rev. **131**, 2582–2589 (1963).
78. R. D. Williams and S. E. Koonin, Direct capture cross sections at low energy, Phys. Rev. C **23**, 2773–2774 (1981).
79. B. T. Kim, T. Izumoto, and K. Nagatani, Radiative capture reaction ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ at low energies, Phys. Rev. C **23**, 33–41 (1981).
80. T. Kajino, G. J. Mathews, and K. Ikeda, Branching ratios for ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, Phys. Rev. C **40**, 525–530 (1989).
81. P. Mohr, H. Abele, R. Zwiebel *et al.*, Alpha scattering and capture reactions in the $A = 7$ system at low energies, Phys. Rev. C **48**, 1420–1427 (1993).

82. P. Mohr, Low-energy ${}^3\text{He}(\alpha, \alpha){}^3\text{He}$ elastic scattering and the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ reaction, *Phys. Rev. C* **79**, 065804(1–10) (2009).
83. B. Buck, R. A. Baldock, and J. A. Rubio, Cluster model of $A = 7$ nuclei and the astrophysical S factor for ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ at zero energy, *J. Phys. G* **11**, L11–L16 (1985).
84. B. Buck and A. C. Merchant, Cluster model of $A = 7$ nuclei revisited, and the astrophysical S factors for ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ at zero energy, *J. Phys. G* **14**, L211–L216 (1988).
85. С. Б. Дубовиченко, А. В. Джазаиров-Кахраманов, Электромагнитные эффекты в легких ядрах на основе потенциальной кластерной модели, *ЭЧАЯ* **28**, 1529–1594 (1997).
86. D. Baye and E. Brainis, Zero-energy determination of the astrophysical S factor and effective-range expansions, *Phys. Rev. C* **61**, 025801(1–10) (2000).
87. С. Б. Дубовиченко, Ю. Н. Узиков, Астрофизические S -факторы реакций с легкими атомными ядрами, *ЭЧАЯ* **42**, 476–577 (2011).
88. S. B. Igamov and R. Yarmukhamedov, Modified two-body potential approach to the peripheral direct capture astrophysical $a + A \rightarrow B + \gamma$ reaction and asymptotic normalization coefficients, *Nucl. Phys. A* **781**, 247–276 (2007).
89. Q. I. Tursunmahatov and R. Yarmukhamedov, Determination of the ${}^3\text{He} + \alpha \rightarrow {}^7\text{Be}$ asymptotic normalization coefficients, the nuclear vertex constants, and their application for the extrapolation of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ astrophysical S factors to the solar energy region, *Phys. Rev. C* **85**, 045807(1–14) (2012).
90. L. Canton and L. G. Levchuk, Low-energy radiative-capture reactions within two-cluster coupled-channel description, *Nucl. Phys. A* **808**, 192–219 (2008).
91. A. Mason, R. Chatterjee, L. Fortunato, and A. Vitturi, Electric and magnetic re-

- sponse to the continuum for $A = 7$ isobars in a dicluster model, *Eur. Phys. J. A* **39**, 107–116 (2009).
92. K. Langanke, Microscopic potential model studies of light nuclear capture reactions, *Nucl. Phys. A* **457**, 351–366 (1986).
93. Q. K. K. Liu, H. Kanada, and Y. C. Tang, Microscopic study of ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ electric-dipole capture reaction, *Phys. Rev. C* **23**, 645–656 (1981).
94. H. Walliser, Q. K. K. Liu, H. Kanada, and Y. C. Tang, Electromagnetic and weak transitions in the seven-nucleon systems, *Phys. Rev. C* **28**, 57–66 (1983).
95. H. Walliser, H. Kanada, and Y.C. Tang, Study of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ radiative-capture reaction with resonating-group wave functions, *Nucl. Phys. A* **419**, 133–147 (1984).
- H. Walliser, H. Kanada, and Y.C. Tang, Comment on “Resonating-group calculation of radiative capture reactions $\alpha({}^3\text{He}, \gamma){}^7\text{Be}$ and $\alpha(t, \gamma){}^7\text{Li}$ at astrophysical low energies”, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 399 (1984).
96. T. Kajino and A. Arima, Resonating-group calculation of radiative capture reactions $\alpha({}^3\text{He}, \gamma){}^7\text{Be}$ and $\alpha(t, \gamma){}^7\text{Li}$ at astrophysical low energies, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 739–742 (1984).
97. T. Mertelmeier and H. M. Hofmann, Consistent cluster model description of the electromagnetic properties of lithium and beryllium nuclei, *Nucl. Phys. A* **459**, 387–416 (1986).
98. T. Kajino, The ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ reactions at astrophysical energies, *Nucl. Phys. A* **460**, 559–580 (1986).
99. T. Kajino, H. Toki, K.-I. Kubo, and I. Tanihata, Nuclear-matter radii of ${}^7\text{Be}$ and ${}^7\text{Li}$ and astrophysical S-factors for radiative alpha-capture reactions, *Phys. Lett. B* **202**, 475–478 (1988).
100. T. Altmeyer, E. Kolbe, T. Warmann *et al.*, On discrepancies within the experi-

- mental and theoretical low energy ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ cross sections, *Z. Phys. A* **330**, 277–282 (1988).
101. L. L. Chopovsky, On the astrophysical S -factor of ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ reactions at zero energy, *Phys. Lett. B* **229**, 316–320 (1989).
 102. A. Csóto and K. Langanke, Study of the ${}^3\text{He}({}^4\text{He}, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, \gamma){}^7\text{Li}$ reactions in an extended two-cluster model, *Few-Body Syst.* **29**, 121–130 (2000).
 103. K. Arai, D. Baye, and P. Descouvemont, Microscopic study of the ${}^6\text{Li}(p, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^6\text{Li}(p, \alpha){}^3\text{He}$ reactions, *Nucl. Phys. A* **699**, 963–975 (2002).
 104. K. M. Nollett, S. C. Pieper, R. B. Wiringa *et al.*, Quantum Monte Carlo calculations of neutron- α scattering, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 022502(1–4) (2007).
 105. S. Quaglioni and P. Navrátil, *Ab initio* many-body calculations of nucleon-nucleus scattering, *Phys. Rev. C* **79**, 044606(1–28) (2009).
 106. K. M. Nollett, Radiative α -capture cross sections from realistic nucleon-nucleon interactions and variational Monte Carlo wave functions, *Phys. Rev. C* **63**, 054002(1–13) (2001).
 107. L. E. Marcucci, K. M. Nollett, R. Schiavilla, R. B. Wiringa, Modern theories of low-energy astrophysical reactions, *Nucl. Phys. A* **777**, 111–136 (2006).
 108. P. Navrátil, C. A. Bertulani, and E. Caurier, ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ S -factor from *ab initio* wave functions, *Nucl. Phys. A* **787**, 539c–546c (2007).
 109. P. Navrátil, S. Quaglioni, I. Stetcu, and B. R. Barrett, Recent developments in no-core shell-model calculations, *J. Phys. G.* **36**, 083101(1–54) (2009).
 110. T. Neff, Microscopic calculation of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ capture cross sections using realistic interactions, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 042502(1–4) (2011).
 111. T. Neff and H. Feldmeier, Clustering and other exotic phenomena in nuclei, *Eur.*

- Phys. J. Spec. Top. **156**, 69–92 (2008).
112. R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, and R. Schiavilla, Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking, Phys. Rev. C **51**, 38–51 (1995).
113. А. С. Соловьев, С. Ю. Игашов, Матричные элементы электромагнитных операторов на базисных функциях алгебраической версии метода резонирующих групп, Яд. физ. и инж. **4**, 989–994 (2013).
114. А. С. Соловьев, С. Ю. Игашов, Ю. М. Чувильский, Исследование реакции радиационного захвата $t + \alpha \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ в рамках алгебраической версии метода резонирующих групп, Изв. РАН. Сер. физ. **78**, 621–626 (2014).
115. А. С. Соловьев, С. Ю. Игашов, Ю. М. Чувильский, Микроскопическая интерпретация результатов новых измерений реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, ЯФ **77**, 1525–1527 (2014).
116. А. С. Соловьев, С. Ю. Игашов, Теоретическое исследование реакции ${}^3\text{H} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ при низких энергиях, VII Научно-техническая конференция молодых ученых “ВНИИА-2013”, Москва, Сборник тезисов, с. 18 (2013).
117. А. С. Соловьев, С. Ю. Игашов, Микроскопическое вычисление астрофизического S-фактора и коэффициента ветвления реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, VIII Научно-техническая конференция молодых ученых “ВНИИА-2014”, Москва, Сборник тезисов, с. 19 (2014).
118. A. S. Solovyev, S. Yu. Igashov, Yu. M. Tchuvil'sky, Microscopic calculation of astrophysical S-factor and branching ratio of the reaction ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$, VI International Conference “Fusion14”, New Delhi, India, Book of Abstracts, p. 90 (2014).
119. A. S. Solovyev, S. Yu. Igashov, Yu. M. Tchuvil'sky, Treatment of the mirror reactions ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ and ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ in the algebraic version of the resonating group model, 3rd International Workshop on “State of the Art in Nuclear Cluster Physics”, Yokohama, Japan, Book of Abstracts, p. 44 (2014).

120. A. S. Solovyev, S. Yu. Igashov, Study of the reaction of radiative capture $t + \alpha \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ in the framework of the algebraic version of the resonating group method, LXIII International Conference “Nucleus 2013”, Book of Abstracts, Moscow, Russia, p. 231 (2013).
121. A. S. Solovyev, S. Yu. Igashov, Yu. M. Tchuvil'sky, The resonating group model description of the radiative capture reaction ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, LXIV International Conference “Nucleus 2014”, Minsk, Belarus, Book of Abstracts, p. 168 (2014).
122. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента* (Наука, Ленинград, 1975).
123. Э. Эль-Баз, Б. Кастель, *Графические методы алгебры спинов в физике атома, ядра и элементарных частиц* (пер. с англ. Мир, Москва, 1974).
124. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган (пер. с англ. Наука, Москва, 1979).
125. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра* (пер. с англ. Наука, Москва, 1965).
126. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (пер. с англ. Наука, Москва, 1973).
127. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Физматлит, Москва, 1963).
128. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены* (Физматлит, Москва, 2005).
129. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (Физматлит, Москва, 2008).
130. A. Hasegawa and S. Nagata, Ground state of ${}^6\text{Li}$, Prog. Theor. Phys. **45**, 1786–

- 1807 (1971).
131. F. Tanabe, A. Tohsaki, and R. Tamagaki, α - α scattering at intermediate energies, *Prog. Theor. Phys.* **53**, 677–691 (1975).
132. H. Kanada, T. Kaneko, S. Nagata, and M. Nomoto, Microscopic study of nucleon- ^4He scattering and effective nuclear potentials, *Prog. Theor. Phys.* **61**, 1327–1341 (1979).
133. T. Kajino, T. Matsuse, and A. Arima, Electromagnetic properties of ^7Li and ^7Be in a cluster model, *Nucl. Phys. A* **413**, 323–352 (1984).
134. С. Ю. Игашов, Об асимптотике матричных элементов кулоновского взаимодействия в осцилляторном представлении в окрестности главной диагонали, *ЯФ* **60**, 2202–2204 (1997).
135. С. Ю. Игашов, Об использовании разложений по системе осцилляторных функций для решения задач непрерывного спектра, *Изв. РАН. Сер. физ.* **65**, 98–104 (2001).
136. С. Ю. Игашов, Асимптотика коэффициентов Фурье и сходимость разложений по осцилляторному базису, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **43**, 81–94 (2003).
137. H. A. Bethe and M. E. Rose, Kinetic energy of nuclei in the Hartree Model, *Phys. Rev.* **51**, 283–285 (1937).
138. J. P. Elliott and T. H. R. Skyrme, Centre-of-mass effects in the nuclear shell-model, *Proc. Roy. Soc. A* **232**, 561–566 (1955).
139. С. Ю. Игашов, Р. Т. Тяпаев, Формула для расчета матричных элементов спин-орбитального взаимодействия на базисных функциях алгебраической версии метода резонирующих групп, *ЯФ* **58**, 843–848 (1995).
140. С. Ю. Игашов, Ю. М. Чувильский, Реалистическое NN-взаимодействие в ба-

- зисе функций алгебраической версии метода резонирующих групп, Изв. РАН. Сер. физ. **66**, 385–391 (2002).
141. Г. Фраунфельдер, Э. Хенли, *Субатомная физика* (пер. с англ. Мир, Москва, 1979).
142. P. Ring and P. Schuck, *The nuclear many-body problem* (Springer, New York, 1980).
143. W. Greiner and J. A. Maruhn, *Nuclear models* (Springer, Berlin, 1996).
144. J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical nuclear physics* (Springer, New York, 1979).
145. И. Айзенберг, В. Грайнер, *Механизмы возбуждения ядра. Электромагнитное и слабое взаимодействия* (пер. с англ. Атомиздат, Москва, 1973).
146. D. Baye and P. Descouvemont, Electromagnetic transitions and radiative capture in the generator-coordinate method, *Nucl. Phys. A* **407**, 77–97 (1983).
147. S. Gartenhaus and C. Schwartz, Center-of-mass motion in many-particle systems, *Phys. Rev.* **108**, 482–490 (1957).
148. D. R. Tilley, C. M. Cheves, J. L. Godwin *et al.*, Energy levels of light nuclei $A = 5, 6, 7$, *Nucl. Phys. A* **708**, 3–163 (2002).
149. K. Varga, Y. Suzuki, and Y. Ohbayasi, Microscopic multicluster description of the neutron-rich helium isotopes, *Phys. Rev. C* **50**, 189–195 (1994).
150. K. Varga and Y. Suzuki, Precise solution of few-body problems with the stochastic variational method on a correlated Gaussian basis, *Phys. Rev. C* **52**, 2885–2905 (1995).
151. K. Varga, Y. Suzuki, and I. Tanihata, Microscopic four-cluster description of the mirror nuclei ${}^9\text{Li}$ and ${}^9\text{C}$, *Phys. Rev. C* **52**, 3013–3025 (1995).

152. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции* (Физматлит, Москва, 2003).
153. N. Austern, R. M. Drisko, E. C. Halbert, and G. R. Satchler, Theory of finite-range distorted-waves calculations, *Phys. Rev.* **133**, B3–B16 (1964).
154. P. D. Miller and G. C. Phillips, Scattering of He^3 from He^4 and States in Be^7 , *Phys. Rev.* **112**, 2048–2052 (1958).
155. T. A. Tombrello and P. D. Parker, Scattering of He^3 from He^4 , *Phys. Rev.* **130**, 1112–1119 (1963).
156. R. J. Spiger and T. A. Tombrello, Scattering of He^3 by He^4 and of He^4 by tritium, *Phys. Rev.* **163**, 964–984 (1967).
157. D. M. Hardy, R. J. Spiger, S. D. Baker *et al.*, Scattering of ^3He and ^4He from polarized ^3He between 7 and 18 MeV, *Nucl. Phys. A* **195**, 250–256 (1972).
158. A. C. L. Barnard, C. M. Jones, and G. C. Phillips, The scattering of He^3 by He^4 , *Nucl. Phys.* **50**, 629–640 (1964).
159. W. R. Boykin, S. D. Baker, and D. M. Hardy, Scattering of ^3He and ^4He from polarized ^3He between 4 and 10 MeV, *Nucl. Phys. A* **195**, 241–249 (1972).
160. G. Audi, A.H. Wapstra, and C. Thibault, The AME2003 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references, *Nucl. Phys. A* **729**, 337–676 (2003).
161. M. Ivanovich, P. G. Young, and G. G. Ohlsen, Elastic scattering of several hydrogen and helium isotopes from tritium, *Nucl. Phys. A* **110**, 441–462 (1968).