

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ГЛУБИННОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОЗЫ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ
ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО**

Белоусов А.В., Грязнов С.В., Черняев А.П.,

Препринт НИИЯФ МГУ-2003-20/733

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ
ФИЗИКИ
им. Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ГЛУБИННОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОЗЫ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ
ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО**

Белоусов А.В., Грязнов С.В., Черняев А.П.,

Препринт НИИЯФ МГУ-2003-20/733

УДК 523.165

Belousov A.V., Gryaznov S.V., Chernyaev A.P.,

E-mail address: alexpetr@rector.msu.ru

Analytical diagnosis formula dose-depth distribution under passing electron through matter.

PREPRINT NPI MSU – 2003 -20/733

Abstract:

Resume analytical formula dose-depth distribution under passing electron through matter, based upon analysis electron-photon gust. Execute analysis of accuracy results.

Белоусов А.В., Грязнов С.В., Черняев А.П.

"Аналитическая оценка выражения для глубинного распределения дозы при прохождении электронов через вещество"

Аннотация:

В работе получено аналитическое выражение для глубинного распределения дозы при прохождении электронов через вещество, на основе анализа развития электронно-фотонных ливней. Выполнена оценка точности результатов

©НИИЯФ им. Д.В. Скобельцина, 2003
©Белоусов А.В. Грязнов С.В. Черняев А.П., 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Развитие электронно-фотонного ливня с глубиной.....	5
Аналитическое решение.....	14
Анализ и обсуждение результатов.....	20
Заключение.....	23
ЛИТЕРАТУРА.....	24

Введение

Для электронов малых энергий и для более тяжелых частиц практически всех энергий потери на столкновения преобладают над радиационными потерями. При взаимодействии электронов больших энергий с веществом только малая часть их энергии поглощается непосредственно при взаимодействии первичных электронов, а основная часть превращается в фотоны достаточно высоких энергий. Вторичные фотоны в свою очередь либо образуют пары, либо претерпевают комптоновское рассеяние. В результате обоих этих процессов возникают электроны с энергиями, сравнимыми с энергией фотона. Эти новые электроны опять испускают фотоны, которые вновь образуют пары или комптоновские электроны. На каждой следующей ступени число частиц возрастает, а их средняя энергия убывает. В ходе этого процесса все большее число электронов попадает в такую энергетическую область, где радиационные потери становятся малыми и не могут конкурировать с потерями энергии на столкновения, пока, в конце концов, вся энергия первичного электрона не будет полностью растрочена на ионизацию и возбуждение атомов. Описанное выше явление обычно называют *размножающимся или каскадным ливнем*. Ливень может быть создан не только электроном большой энергии, но и высокоэнергетичными фотонами.

Цель настоящей работы на основании решения уравнений описывающих ливень получить распределение дозы в зависимости от глубины проникновения электронов или фотонов в вещество. Получить аппроксимацию зависимости в достаточно простом виде.

Развитие электронно-фотонного ливня с глубиной

Предположим, что на слой вещества падает электрон или фотон с энергией E_0 , и рассмотрим затем плоскость на глубине t от точки попадания ее в вещество, которая перпендикулярна к направлению движения первичной частицы. Разделим плоскость на бесконечно малые элементы площади $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots, d\sigma_m$, телесный угол и энергетические интервал от 0 до E_0 - на бесконечно малые элементы $d\omega_1, d\omega_2, \dots, d\omega_n$ и dE_1, dE_2, \dots, dE_l . Требуется определить вероятность того, что через рассматриваемую плоскость пройдут N_π электронов и N_γ фотонов, энергия которых заключена в интервале $(E_l, E_l + dE_l)$ с пространственными координатами в интервале $(\sigma_m, \sigma_m + d\sigma_m)$ и с угловыми координатами в интервале

телесного угла $(\omega_n, \omega_n + d\omega_n)$. Решение этой проблемы встречает трудности математического характера. Для решения задачи вводятся упрощающие предположения, позволяющие упростить решения математических уравнений.

При больших энергиях (свыше 10 МэВ) углы, под которыми испускаются вторичные электроны и фотоны, чрезвычайно малы (согласно вычислениям Стирнса [1] среднее значение квадрата угла испускания кванта электроном в процессе излучения или вылета электрона и позитрона в процессе рождения пары обратно пропорционально энергии γ -кванта или электрона); рассеяние электронов также мало, по крайней мере, в веществах с небольшим *атомным номером*; поэтому, можно считать, что ливень преимущественно развивается в направлении первичной частицы. Это обстоятельство позволяет рассматривать развитие ливней в направлении первоначального распространения как самостоятельную задачу. А их *поперечное распространение* как поправку задаче прямолинейного распространения ливня. Поэтому сначала можно определить зависимость функции, описывающей ливень, от толщины проходимого ливнем слоя вещества без учета увеличения пути из-за углового разброса ливневых частиц. А поперечное распространение ливня и угловое распределение ливневых частиц рассматривать как малую поправку к результатам, полученным из решения задачи о прямолинейном распространении ливня.

Пусть $\pi(E,t)dE$ - среднее число электронов с энергией заключенной в интервале от E до $(E, E+dE)$ на глубине t . Соответственно обозначим через $\gamma(E,t)dE$ среднее число фотонов с энергией между E и $E+dE$ на глубине t . Величины $\pi(E,t)$ и $\gamma(E,t)$ представляют собой соответственно дифференциальные спектры электронов и фотонов. Интегральные спектры электронов и фотонов в этом случае принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi(E,t) = \int_E^{\infty} \pi(E',t) dE', \\ \Gamma(E,t) = \int_E^{\infty} \gamma(E',t) dE'. \end{array} \right. \quad (1)$$

Они представляют, соответственно среднее число электронов и фотонов на глубине t , имеющих энергию большую чем E . Назовем *энергией диссипации* и обозначим через $\rho(t)$ энергию, теряемую всеми частицами ливня на возбуждение и ионизацию атомов на

единице пути через слой вещества. $\pi^{(\pi)}(E_0, E, t)$, $\pi^{(\gamma)}(E_0, E, t)$ обозначают ливень, образованный одним электроном с энергией E_0 или одним фотоном энергии E_0 .

Рассмотрим «средний» ливень, образованный электроном и ограничимся рассмотрением только тех вторичных частиц, энергия которых мала по сравнению с энергией первичной частицы. Тогда, каждая из величин π, γ, Γ, Π представляет собой функцию толщины t . Качественный характер изменения любой из этих функции изображен на рис. 1. Функция сначала быстро возрастает с увеличением t , проходит через максимум и затем спадает до нуля. Эти функции также описывают распределение дозы с глубиной.

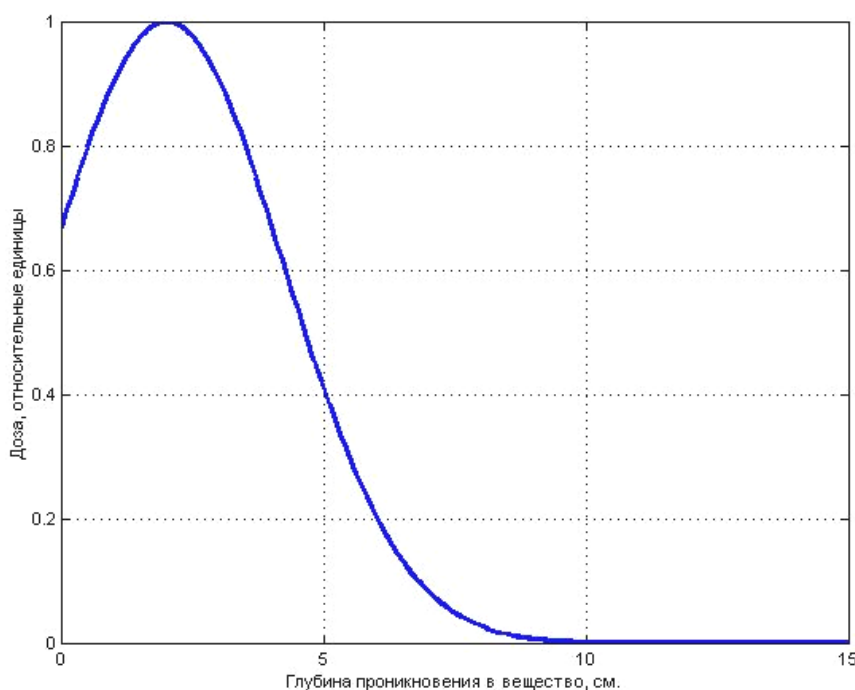


Рис 1. Качественный вид зависимости дозы от глубины проникновения.

Для описания качественного вида распределения дозы на рис.1. использована простейшая модель ливня. Поскольку радиационные длины для образования пар и тормозного излучения отличаются в среднем на 30-50%, то для качественного описания можно положить их одинаковыми. В этом случае вероятность того, что эти процессы произойдут на расстояние ξ , равна $1/2$, если $\xi = \xi_0 \ln 2$, где ξ_0 - радиационная единица длины. Поэтому, если ливень образуется γ -квантом с энергией E_0 , то электрон-позитронная пара образуется после прохождения фотоном в среднем расстояния $R \approx \xi$. И мы принимаем, что энергия γ -кванта распределена поровну между частицами пары. На следующем расстоянии электрон и позитрон теряют в среднем половину своей энергии, и каждый

испускает в среднем по одному фотону. Качественное развитие ливня представлено на рис.2. Как только электроны становятся не релятивистскими, число частиц резко падает из-за ионизационных потерь.

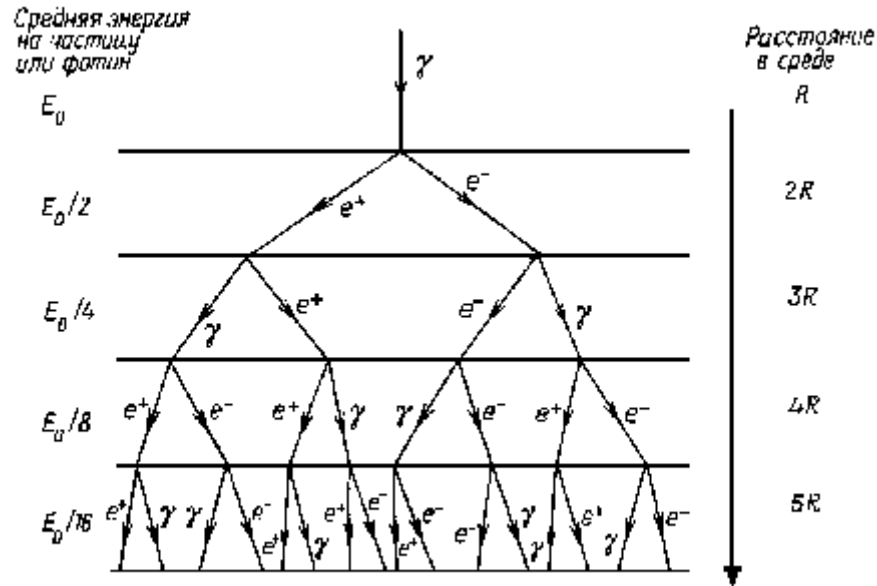


Рис.2. Качественное развитие ливня.

Рассмотрим величины $\pi(E,t)dE$ и $\gamma(E,t)dE$, дающие соответственно число электронов и фотонов на глубине t с энергией, заключенной в интервале $(E, E + dE)$. После прохождения бесконечно малого слоя вещества толщиной dt число электронов, энергия которых находится в этом интервале, изменится в результате действия следующих механизмов:

а) Фотоны с энергией E' , большей чем, E образуют некоторое число электронов и позитронов в энергетическом интервале $(E, E + dE)$, которое составляет:

$$dEdt \int_E^{\infty} \gamma(E',t) \varphi_{\gamma\pi}(E',E) dE' \quad (2)$$

где $\varphi_{\gamma\pi}(E',E)dE$ - вероятность, с которой фотон, обладающий энергией E' , образует на радиационной единице длины электрон с энергией заключенной в интервале $(E, E + dE)$. Это может произойти в результате рождения электрон-позитронной пары, либо в результате комптон-эффекта. Таким образом

$$\varphi_{\gamma\pi}(E',E)dE = 2\varphi_{\text{пар}}(E',E)dE + \varphi_{\text{компт}}(E',E - E)dE \quad (3)$$

В этом выражении $\varphi_{\text{пар}}(E', E)dE$ - вероятность рождения пары на радиационной единице длины, $\varphi_{\text{компт}}(E', E' - E)dE$ - вероятность с которой фотон, обладающий энергией E , испытает комптоновское рассеяние на радиационной единице длины.

б) Электроны с энергией E' , большей чем E , образуют некоторое число электронов в интервале энергий $(E, E + dE)$:

$$dEdt \int_E^{\infty} \pi(E', t) \varphi_{\pi\pi}(E', E) dE' \quad (4)$$

где $\varphi_{\pi\pi}(E', E)dE$ - вероятность, с которой электрон, обладающий энергией E' , образует на радиационной единице длины электрон с энергией в интервале $(E, E + dE)$. Это может произойти либо в результате процесса радиационного торможения, в котором электрон теряет энергию $E' - E$, либо вследствие процесса столкновения, в котором один из двух сталкивающихся электронов выходит из столкновения с энергией E . Таким образом

$$\varphi_{\pi\pi}(E', E)dE = \varphi_{\text{рад}}(E', E' - E)dE + \varphi_{\text{см}}(E', E)dE \quad (5)$$

В этом выражении $\varphi_{\text{рад}}(E', E' - E)dE$ - вероятность радиационного торможения, а $\varphi_{\text{см}}(E', E)dE$ - вероятность столкновения с атомными электронами. В $\varphi_{\text{см}}(E', E)dE$ величина E изменяется от 0 до E' , и каждый процесс столкновения учитывается дважды, т.о. нет необходимости учитывать тот факт, что из каждого столкновения выходят два электрона падающий и электрон атома.

в) Поскольку часть электронов находившихся в интервале $(E, E + dE)$, теряя энергию, покидают его, то их число равно уменьшается на $\pi(E, t) \mu_{\pi}(E) dEdt$, где

$$\mu_{\pi}(E) = \int_0^E \varphi_{\text{рад}}(E, E') dE' + \frac{1}{2} \int_0^E \varphi_{\text{см}}(E, E') dE'. \quad (6)$$

полная вероятность выхода электрона из энергетического интервала $(E, E + dE)$ в результате столкновений и испускания γ -квантов. Во втором слагаемом (6) коэффициент $\frac{1}{2}$ учитывает, что в столкновении участвуют два электрона.

Изменение числа фотонов в интервале энергий $(E, E + dE)$ после прохождения излучением слоя вещества dt происходит в результате действия следующих механизмов:

а) Электроны с энергией E' , большей чем E , образуют некоторое число фотонов в энергетическом интервале $(E, E + dE)$, которое составляет:

$$dEdt \int_E^{\infty} \pi(E', t) \varphi_{\pi\gamma}(E', E) dE' \quad (7)$$

где $\varphi_{\pi\gamma}(E', E)dE$ - вероятность, с которой электрон, обладающего энергией E' , образует на радиационной единице длины фотон с энергией в интервале $(E, E + dE)$. Это может произойти только в результате радиационного торможения:

$$\varphi_{\pi\gamma}(E', E) = \varphi_{\text{рад}}(E', E) \quad (8)$$

б) Фотоны с энергией E' , большей чем E , образуют некоторое число фотонов в интервале энергий $(E, E + dE)$, которое составляет:

$$dEdt \int_E^{\infty} \gamma(E', t) \varphi_{\gamma\gamma}(E', E) dE' \quad (9)$$

где $\varphi_{\gamma\gamma}(E', E)dE$ - вероятность, с которой фотон с энергией E' , образует на радиационной единице длины фотон с энергией в интервале $(E, E + dE)$. Это происходит в результате комптоновского рассеяния:

$$\varphi_{\gamma\gamma}(E', E) = \varphi_{\text{компт}}(E', E) \quad (10)$$

в) Часть фотонов, первоначально находившихся в энергетическом интервале $(E, E + dE)$, исчезают, образуя пару, или испытывают комптоновское рассеяние. Их число равно $\gamma(E, t) \mu_{\gamma}(E) dEdt$, где

$$\mu_{\gamma}(E) = \mu_{\text{пар}}(E) + \mu_{\text{компт}}(E). \quad (11)$$

полная вероятность выхода фотонов из энергетического интервала $(E, E + dE)$ в результате рождения пар или комптоновского рассеяния.

Учитывая перечисленные выше процессы (2-11), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi(E,t)}{\partial t} = -\pi(E,t)\mu_\pi(E) + \int_E^\infty \pi(E',t)\varphi_{\pi\pi}(E',E)dE' + \int_E^\infty \gamma(E',t)\varphi_{\gamma\pi}(E',E)dE' \\ \frac{\partial \gamma(E,t)}{\partial t} = -\gamma(E,t)\mu_\gamma(E) + \int_E^\infty \pi(E',t)\varphi_{\pi\gamma}(E',E)dE' + \int_E^\infty \gamma(E',t)\varphi_{\gamma\gamma}(E',E)dE' \end{cases} \quad (12)$$

Для решения системы (12) вместо потерь на столкновения введем непрерывные энергетические потери, приводящие к образованию электронов с энергией меньше η_0 . Уравнение (12) не изменится, если мы примем, что μ_π и $\varphi_{\pi\pi}$ вычислены из допущения, что $\varphi_{cm}(E,E')=0$ когда $E' < \eta_0$ или $E-E' < \eta_0$, (η_0 будет уточнено ниже) и добавить к правой части член

$$M = -\pi(E,t) \int_0^{\eta_0} \varphi_{cm}(E,E')dE' + \int_E^{E+\eta_0} \pi(E',t)\varphi_{cm}(E',E)dE'. \quad (13)$$

Во втором слагаемом (13) примем за новую переменную $E'-E$ и переименуем ее в E' . Из работ Баба [2] и Меллера [3] известно, что

$$\varphi_{cm}(E',E) \approx \frac{E^2}{(E-E')^2(E')^2} \left[1 - \frac{E'}{E} + \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \right]^2, \quad (13a)$$

и, следовательно, симметрично относительно E' и $E-E'$, т.е.

$$\varphi_{cm}(E',E) = \varphi_{cm}(E',E'-E), \quad (14)$$

После данной замены мы можем объединить два подынтегральных выражения (13) в одно:

$$M = \int_0^{\eta_0} \left[-\pi(E',t)\varphi_{cm}(E,E') + \pi(E+E',t)\varphi_{cm}(E+E',E') \right] dE' \quad (15)$$

или, перепишем в виде

$$M = \int_0^{\eta_0} \left[(\pi\varphi_{cm})_{E+E'} - (\pi\varphi_{cm})_E \right] dE' = \int_0^{\eta_0} \frac{\partial \left[\pi(E,t)\varphi_{cm}(E,E') \right]}{\partial E} E' dE'. \quad (16)$$

Если предположить, что электрон испытывает непрерывные энергетические потери $\varepsilon(E)$ на радиационной единице длины, то найдем, что после прохождения слоя вещества толщиной dt , число электронов, вошедших в энергетический интервал $(E, E + dE)$ через верхнюю его границу, будет равно $\pi(E + dE)\varepsilon(E + dE)dt$, и $\pi(E)\varepsilon(E)dt$ электронов покинет тот же интервал через нижнюю его границу. Поэтому изменение числа электронов в этом процессе будет равно:

$$\left[\pi(E + dE)\varepsilon(E + dE)dt - \pi(E)\varepsilon(E)dt \right] = \frac{\partial(\pi(E, t)\varepsilon(E))}{\partial E} dEdt. \quad (17)$$

Таким образом, введение непрерывных энергетических потерь добавляет к правой части системы уравнений (12) слагаемое

$$M' = \frac{\partial(\pi(E, t)\varepsilon(E))}{\partial E}. \quad (18)$$

Легко заметить, что M' совпадает с M , если η_0 достаточно мало в сравнении с E , так что в энергетическом интервале $(E, E + \eta_0)$ величина $\pi(E', t)\varphi_{cm}(E, E')$ может быть аппроксимирована линейной функцией E . В этом случае получаем:

$$M = \int_0^{\eta_0} \frac{\partial}{\partial E} \left[\pi(E, t)\varphi_{cm}(E, E') \right] E' dE' = \frac{\partial}{\partial E} \left[\pi(E, t) \int_0^{\eta_0} \varphi_{cm}(E, E') E' dE' \right] = \frac{\partial}{\partial E} \left[\pi(E, t)\varepsilon(E) \right] \quad (19)$$

Из (19) видно, что (15) и (18) слабо отличаются друг от друга, для малых η_0 . Пренебрежение столкновениями, которые приводят к образованию электронов с энергией, меньшей чем η_0 . Введение вместо них эквивалентные непрерывных энергетических потерь, не изменяет ливневые уравнения в области $E \gg \eta_0$. После введения непрерывных энергетических потерь уравнения (12) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi(E, t)}{\partial t} = -\pi(E, t)\mu_\pi(E) + \int_E^\infty \pi(E', t)\varphi_{\pi\pi}(E', E)dE' + \int_E^\infty \gamma(E', t)\varphi_{\gamma\pi}(E', E)dE' + \frac{\partial}{\partial E} \left[\pi(E, t)\varepsilon(E) \right] \\ \frac{\partial \gamma(E, t)}{\partial t} = \int_E^\infty \pi(E', t)\varphi_{\pi\gamma}(E', E)dE' + \int_E^\infty \gamma(E', t)\varphi_{\gamma\gamma}(E', E)dE' - \gamma(E, t)\mu_\gamma(E) \end{cases} \quad (20)$$

Очевидно, что применимость диффузионных уравнений не ограничивается случаем ливня, вызванного единичным фотоном или электроном. В действительности диффузионные уравнения могут быть разрешены для любых произвольных начальных условий:

$$\pi(E,0) = n_{\pi}(E); \quad \gamma(E,0) = n_{\gamma}(E). \quad (21)$$

где $n_{\pi}(E)$, $n_{\gamma}(E)$ - соответственно энергетическое распределение числа электронов и фотонов на входе в вещество.

В первом приближении ограничим наше рассмотрение областью больших энергий, пренебрежем электронами, которые образовались в результате комптон-эффекта и потерями на столкновения, предполагая, что существуют только радиационные потери и процессы рождения пар, для вышеприведенных условий введем новые обозначения $\psi_{\text{пар}}$ и $\psi_{\text{рад}}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma\pi}(E',E) &= 2\varphi_{\text{пар}}(E',E) = \frac{2}{E'}\psi_{\text{пар}}\left(\frac{E}{E'}\right); \\ \varphi_{\pi\pi}(E',E) &= \varphi_{\text{рад}}(E',E'-E) = \frac{1}{E'}\psi_{\text{рад}}\left(\frac{E'-E}{E'}\right); \\ \varphi_{\pi\gamma}(E',E) &= \varphi_{\text{рад}}(E',E) = \frac{1}{E'}\psi_{\text{рад}}\left(\frac{E}{E'}\right); \\ \varphi_{\gamma\gamma}(E',E) &= 0, \quad \varepsilon(E) = 0; \\ \mu_{\pi}(E') &= \int_0^{E'} \psi_{\text{рад}}\left(\frac{E}{E'}\right) \frac{dE}{E'}; \\ \mu_{\gamma}(E') &= \int_0^{E'} \psi_{\text{пар}}\left(\frac{E}{E'}\right) \frac{dE}{E'} = \mu_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда система уравнений (20), после подстановки в них (22), принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi(E,t)}{\partial t} = \int_0^1 \left[-\pi(E,t) - \frac{1}{1-\nu} \pi\left(\frac{E}{1-\nu}, t\right) \right] \psi_{\text{рад}}(\nu) d\nu + 2 \int_0^1 \gamma\left(\frac{E}{\nu}, t\right) \psi_{\text{пар}}(\nu) d\nu \\ \frac{\partial \gamma(E,t)}{\partial t} = \int_0^1 \pi\left(\frac{E}{\nu}, t\right) \psi_{\text{рад}}(\nu) \frac{d\nu}{\nu} - \gamma(E,t) \mu_0 \end{cases} \quad (23)$$

где введено обозначение $\nu = \frac{E}{E'}$.

Эти уравнения не содержат явно величин, зависящих от свойств того вещества, в котором развивается ливень. Поэтому в данном приближении теория ливней дает один и тот же результат для любого вещества, при условии, что толщина слоя измеряется в радиационных единицах длины для каждого вещества.

Аналитическое решение

Чтобы осуществить переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений используем интегралы Меллина [4-8] от функций $\pi(E,t)$ и $\gamma(E,t)$ по энергии, то есть величины

$$\begin{cases} N_{\pi}(s,t) = \int_0^{\infty} E^s \pi(E,t) dE \\ N_{\gamma}(s,t) = \int_0^{\infty} E^s \gamma(E,t) dE \end{cases} \quad (24)$$

где s - комплексный параметр. Интегралы сходятся, так как N_{π} и N_{γ} определены для всех значений s . Поскольку $\pi(E,t)$ и $\gamma(E,t)$ тождественно равны нулю для всех энергий вне интервала $(0, E_0)$, нам необходимо рассмотреть сходимость только на нижнем пределе, т.к. верхний предел представляет собой число. Это означает, что областью сходимости системы (24) является полуплоскость $\text{Re}(s) > s_0$, где $\text{Re}(s)$ - действительная часть s , а s_0 - вещественная постоянная, не ограничивая общности рассуждений можно положить $s_0 = 0$.

Умножим обе части системы (23) на E^s и проинтегрируем по E от 0 до ∞ . Тогда система (23) приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{\pi}(s,t)}{\partial t} = -A(s)N_{\pi}(s,t) + B(s)N_{\gamma}(s,t), \\ \frac{\partial N_{\gamma}(s,t)}{\partial t} = -C(s)N_{\pi}(s,t) - \mu_0 N_{\gamma}(s,t). \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^1 [1 - (1-v)^s] \psi_{\text{pad}}(v) dv, \\ B(s) &= 2 \int_0^1 v^s \psi_{\text{nap}}(v) dv, \end{aligned} \quad (26)$$

$$C(s) = \int_0^1 v^s \psi_{\text{пад}}(v) dv,$$

$$\mu_0 = \int_0^1 \psi_{\text{пар}}(v) dv.$$

Если в слой вещества входит первичный электрон с энергией E_0 , то начальное условие для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (25) имеет вид: $N_\pi(s, 0) = E_0^s$. Решая систему уравнений (25) получим выражение для интеграла Меллина, которое описывает электронно-фотонный ливень, возникший в результате взаимодействия первичного электрона энергии E_0 с веществом:

$$N_\pi(s, t) = E_0^s \left\{ \frac{\mu_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_1(s)t} - \frac{\mu_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_2(s)t} \right\}, \quad (27)$$

где

$$\begin{cases} \lambda_1(s) = -\frac{[A(s) + \mu_0]}{2} + \frac{1}{2} \left\{ [A(s) - \mu_0]^2 + 4B(s)C(s) \right\}^{1/2} \\ \lambda_2(s) = -\frac{[A(s) + \mu_0]}{2} - \frac{1}{2} \left\{ [A(s) - \mu_0]^2 + 4B(s)C(s) \right\}^{1/2} \end{cases}, \quad (28)$$

и

$$\lambda_1(s) - \lambda_2(s) = \left\{ [A(s) - \mu_0]^2 + 4B(s)C(s) \right\}^{1/2}.$$

Общий вид решения системы (25) для произвольных начальных условий (ливень образуется первичным электроном или фотоном энергии E_0) записывается в виде интегралов Меллина:

$$N(E_0, s, t) = E_0^s \left[N_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + N_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \right]. \quad (29)$$

где t - толщина пройденного слоя вещества.

Для интеграла Меллина от дифференциального спектра электронов $\pi(E, t)$, $N(E_0, s, t) \equiv N_\pi(s, t)$, в случае ливня вызванного первичным электроном с энергией E_0 , интегралы Меллина от энергетического распределения электронов $N_1(s) \equiv N_{1\pi}^{(\pi)}$ и $N_2(s) \equiv N_{2\pi}^{(\pi)}$ имеют вид:

$$\begin{cases} N_{1\pi}^{(\pi)} = \frac{\mu_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, \\ N_{2\pi}^{(\pi)} = \frac{\mu_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}. \end{cases} \quad (30)$$

В случае интеграла Меллина от дифференциального спектра электронов $\pi(E, t)$ $N(E_0, s, t) \equiv N_\pi(s, t)$, в случае ливня вызванного первичным фотоном с энергией E_0 , интегралы Меллина от энергетического распределения электронов $N_1(s) \equiv N_{1\gamma}^{(\pi)}$ и $N_2(s) \equiv N_{2\gamma}^{(\pi)}$ имеют вид:

$$\begin{cases} N_{1\gamma}^{(\pi)} = \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, \\ N_{2\gamma}^{(\pi)} = \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}. \end{cases} \quad (31)$$

Аналогично интегралы Меллина от дифференциального спектра фотонов $\gamma(E, t)$, $N(E_0, s, t) \equiv N_\gamma(s, t)$, в случае ливня вызванного первичным электроном с энергией E_0 , интегралы Меллина от энергетического распределения фотонов $N_1(s) \equiv N_{1\pi}^{(\gamma)}$ и $N_2(s) \equiv N_{2\pi}^{(\gamma)}$ имеют вид:

$$\begin{cases} N_{1\pi}^{(\gamma)} = \frac{-[\mu_0 + \lambda_1(s)][\mu_0 + \lambda_2(s)]}{C(s)[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)]}, \\ N_{2\pi}^{(\gamma)} = \frac{-[\mu_0 + \lambda_1(s)][\mu_0 + \lambda_2(s)]}{C(s)[\lambda_1(s) - \lambda_2(s)]}. \end{cases} \quad (32)$$

Для интеграла Меллина от дифференциального спектра фотонов $\gamma(E, t)$, $N(E_0, s, t) \equiv N_\gamma(s, t)$, в случае ливня вызванного первичным фотоном с энергией E_0 , интегралы Меллина от энергетического распределения фотонов $N_1(s) \equiv N_{1\gamma}^{(\gamma)}$ и $N_2(s) \equiv N_{2\gamma}^{(\gamma)}$ имеют вид:

$$\begin{cases} N_{1\gamma}^{(\pi)} = \frac{-[\mu_0 + \lambda_2(s)]}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, \\ N_{2\gamma}^{(\pi)} = \frac{[\mu_0 + \lambda_1(s)]}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}. \end{cases} \quad (33)$$

Выражение для числа электронов, обладающих энергией большей чем E , на глубине t : $\pi(E, t)$, согласно [9-10] получается обратным преобразованием Меллина:

$$\alpha(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C E^{-(s+1)} N_\alpha(s, t) ds, \quad (34)$$

где $\alpha \rightarrow \pi, \gamma, \Pi, \Gamma$, а путь интегрирования C параллелен мнимой оси и проходит внутри полосы сходимости $\text{Re}(s) > 0$.

Вычислим явный вид выражений для $A(s), B(s), C(s), \mu_0$, учитывая, что согласно [2]:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{нар}}(v) &= v^2 + (1-v)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2b\right)v(1-v), \\ \psi_{\text{пад}}(v) &= \frac{1}{v} \left[1 + (1-v)^2 - \left(\frac{2}{3} - 2b\right)(1-v) \right], \end{aligned}$$

(35)

где $v = \frac{E}{E'}$

$$b = \frac{1}{18 \ln(183Z^{-1/3})} = 0.0122,$$

откуда, выражения (26) имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \int_0^1 \psi_{\text{нар}}(v) dv = \frac{7}{9} - \frac{b}{3}, \\ B(s) &= 2 \int_0^1 v^s \psi_{\text{нар}}(v) dv = 2 \left[\frac{1}{s+1} - \frac{\frac{4}{3} + 2b}{(s+2)(s+3)} \right], \\ C(s) &= \int_0^1 v^s \psi_{\text{пад}}(v) dv = \frac{1}{s+2} + \frac{\frac{4}{3} + 2b}{s(s+1)}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$A(s) = \int_0^1 \left[1 - (1-v)^s \right] \psi_{\text{пад}}(v) dv = 1.36 \frac{d}{ds} \ln(s!) - \frac{1}{(s+1)(s+2)} - 0.075.$$

Ввиду того, что выражение для $A(s)$ не может быть вычислено в явном виде то и обратное преобразование Меллина не может быть найдено в аналитическом виде. Однако выражения для дифференциальных спектров могут быть получены в параметрическом виде.

Выражение для дифференциального спектра электронов согласно (34) имеет вид:

$$\alpha(E,t)dE = \frac{1}{2\pi i} \frac{dE}{E} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} E^{-s} N_{\alpha}(s,t) ds. \quad (37)$$

Каждый член в комплексном интеграле (37) содержит слагаемое пропорциональные соответственно $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$. Поскольку согласно (28) $\lambda_2 < \lambda_1$ в целях упрощения пренебрежем вторым членом в (28). С помощью пакета MATLAB 5.3 методом перевала [11-12] были получены следующие результаты (в силу особенностей преобразований они получены в параметрическом виде) на слой вещества падает электрон, обладающий энергией E_0 . Из (29-31,36,37) дифференциальный спектр электронов имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^{(\pi)}(E_0, E, t) dE = \left\{ \frac{N_{1\pi}^{(\pi)}(s)}{\sqrt{2\pi} [\lambda_1''(s)t]^{1/2}} \right\} \left(\frac{E_0}{E} \right) \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)t} \\ t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \ln \left(\frac{E_0}{E} \right) \end{array} \right. \quad (38)$$

Из (29,32,33,36,37) дифференциальный спектр фотонов, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^{(\pi)}(E_0, E, t) dE = \left\{ \frac{\sqrt{s} \cdot N_{1\gamma}^{(\pi)}(s)}{\sqrt{2\pi} \left[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{2s^2} \right]^{1/2}} \right\} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)t} \\ t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left(\ln \left(\frac{E_0}{E} \right) - \frac{1}{2s} \right) \end{array} \right. \quad (39)$$

Из (1,29-31,36,37) интегральный спектр электронов, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi^{(\pi)}(E_0, E, t) = \left\{ \frac{N_{1\pi}^{(\pi)}(s)}{\sqrt{2\pi} \left[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{2s^2} \right]^{1/2}} \right\} \frac{1}{s} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)t} \\ t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left(\ln \left(\frac{E_0}{E} \right) - \frac{1}{s} \right) \end{array} \right. \quad (40)$$

Аналогично в случае, когда на слой вещества падает фотон, обладающий энергией E_0 из (29-31,36,37) дифференциальный спектр электронов, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^{(\gamma)}(E_0, E, t) dE = \left\{ \frac{\frac{1}{\sqrt{s}} N_{1\pi}^{(\gamma)}(s)}{\sqrt{2\pi} \left[\lambda_1''(s)t - \frac{1}{2s^2} \right]^{1/2}} \right\} \sqrt{s} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)t} \\ t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left(\ln \left(\frac{E_0}{E} \right) + \frac{1}{s} \right) \end{array} \right. \quad (41)$$

Из (29,32,33,36,37) дифференциальный спектр электронов, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^{(\gamma)}(E_0, E, t) dE = \left\{ \frac{N_{1\gamma}^{(\gamma)}(s)}{\sqrt{2\pi} \left[\lambda_1''(s)t \right]^{1/2}} \right\} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)t} \\ t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \ln \left(\frac{E_0}{E} \right) \end{array} \right. \quad (42)$$

Из (1,29,32,33,36,37) интегральный спектр электронов, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi^{(\gamma)}(E_0, E, t) dE = \left\{ \frac{\frac{1}{\sqrt{s}} N_{1\pi}^{(\gamma)}(s)}{\sqrt{2\pi} \left[\lambda_1''(s)t + \frac{1}{2s^2} \right]^{1/2}} \right\} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{dE}{E} e^{\lambda_1(s)t} \\ t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left(\ln \left(\frac{E_0}{E} \right) - \frac{1}{2s} \right) \end{array} \right. \quad (43)$$

Проведение математических расчетов в среде MATLAB с учетом комптоновского рассеяния производится таким образом, что правые части (38-43) для $\pi^{(\pi)}, \gamma^{(\pi)}, \Pi^{(\pi)}$ умножаются на выражение

$$K(s, -s). \quad (44)$$

$K(s, -s)$ является решением уравнения в конечных разностях

$$\left[\lambda(s) + A(s+r) - \frac{B(s+r)C(s+r)}{\mu_0 + \lambda(r)} \right] K(s, r) = r(s, r-1) \quad (45)$$

Анализ и обсуждение результатов

Доза формируется следующим образом: в результате прохождения γ -квантов через вещество они либо образуют электроны в результате комптон-эффекта (первичная ионизация), либо - рождения пар. Электроны, образованные в результате этих процессов, в свою очередь либо производят вторичную ионизацию, либо образуют γ -кванты в результате радиационного торможения. Первичные же электроны, в свою очередь образуют γ -кванты или вторичные электроны. Таким образом, представляется более перспективным рассчитывать не непосредственно поглощенную дозу, а находить число электронов на заданной глубине. Тогда поглощенную дозу можно вычислить через потенциал ионизации среды:

$$D(t) \sim \Pi(E_0, 0, t) U_{\text{ион}} \quad (46)$$

где $U_{\text{ион}}$ - потенциал ионизации среды, через которую проходят электроны.

Вычисления, проведенные в математической среде MATLAB, показывают, что в первом приближении, ливневую функцию $\Pi(E_0, 0, t)$ можно приблизить следующей кривой (как следует из (40), если совершить предельный переход $E \rightarrow 0$):

$$\begin{cases} D(t) = \exp\left(-[\alpha \cdot t^3 + \beta \cdot t^2 + \gamma \cdot t + \delta]\right) \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \approx \ln E \end{cases} \quad (47)$$

где параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ вычисляются методом наименьших квадратов из сравнения с экспериментальными результатами.

Для вычисления параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ были приближены наилучшим образом экспериментальные кривые для следующих

значений [13] энергии: $E = 6.2, 7, 9, 11, 15, 25$ МэВ. Также была проверена качественная зависимость параметров от энергии. Исходя из расчетов, они должны зависеть от энергии первичного пучка по логарифмическому закону, но это является следствием упрощений в нашей модели. Тем не менее, их оценка показала, что они слабо отклоняются от логарифмического закона в том диапазоне энергий, для которого мы делали расчеты, то есть для диапазона от 10.6 до 25 МэВ (рис. 3-6). Расчеты показали, что параметры можно записать в виде:

$$\begin{cases} \alpha \approx 0.18 \ln(E) - 0.12, \\ \beta \approx 0.03 \ln(E) + 0.27, \\ \gamma \approx 1.6 \ln(E) + 0.9, \\ \delta \approx 0.8 \ln(E) - 11.3. \end{cases} \quad (48)$$

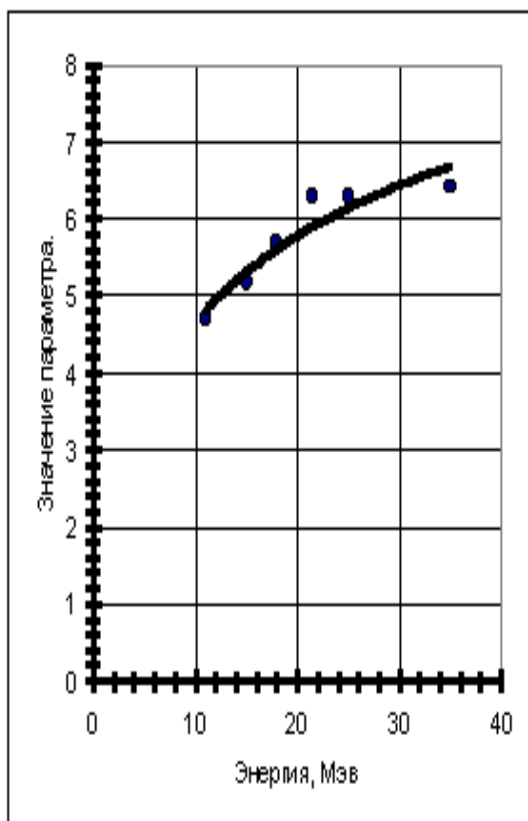


Рис 5. Зависимость γ от энергии.

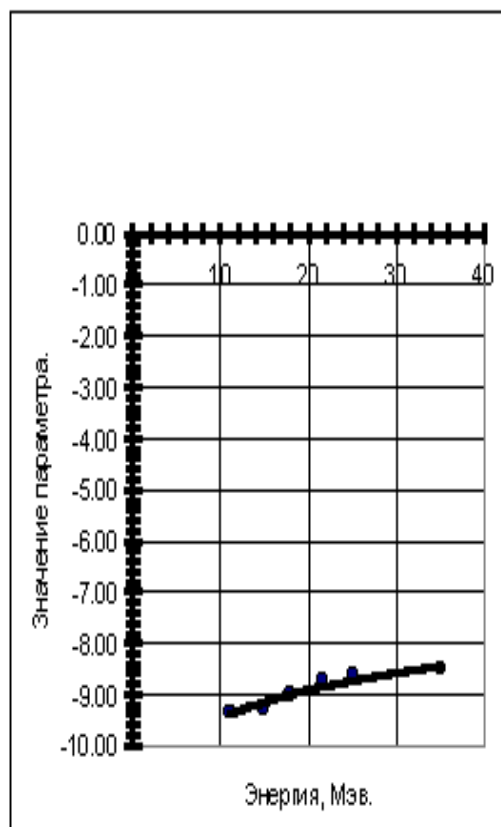


Рис.6. Зависимость δ от энергии.

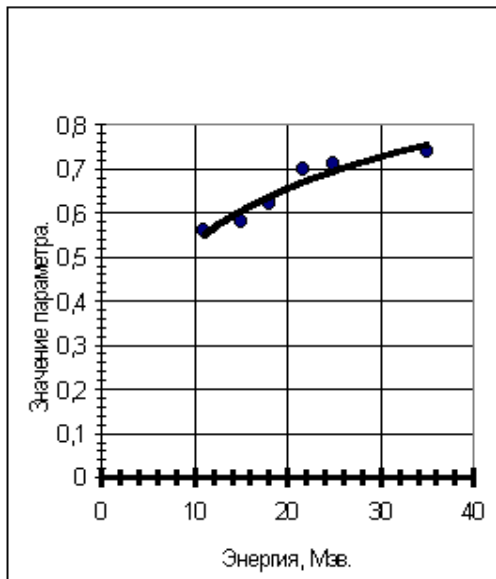


Рис 3. Зависимость α от энергии.

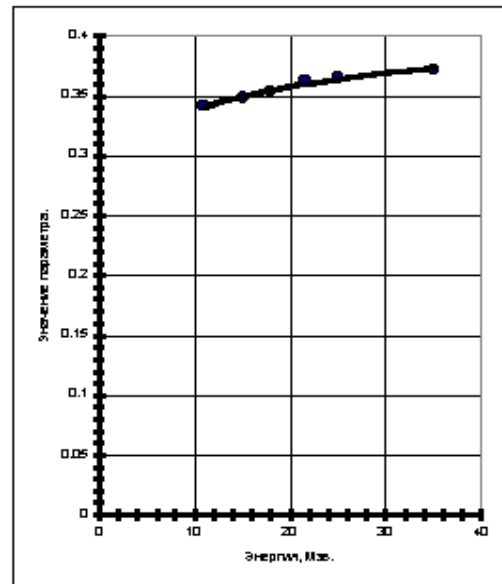


Рис. 4. Зависимость β от энергии.

В выражениях (48) энергия берется в Мэвах. На рис. 7 представлены *пунктирной линией* результаты на основе нашего приближения, а *сплошной линией* экспериментальные значения.

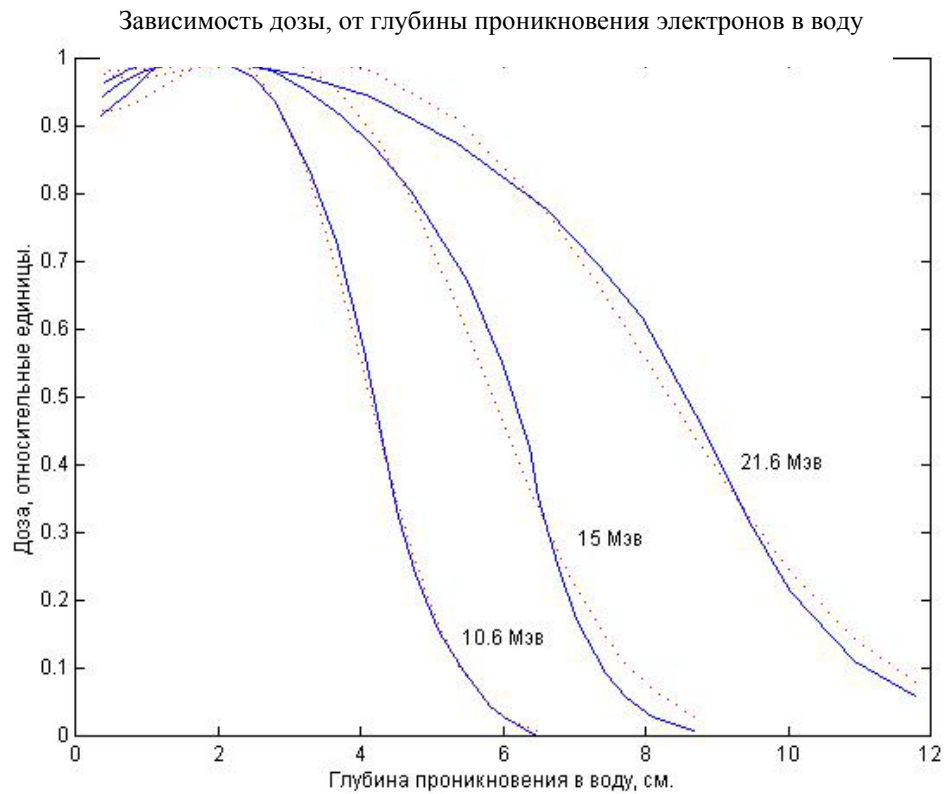


Рис 4. Зависимость дозы от глубины проникновения в вещество (вода).

Заключение

В настоящей работе получена оценка глубинного распределения дозы при прохождении электронов через вещество, на основе анализа решения уравнений описывающих развитие электронно-фотонных ливней в веществе. Получены оценки зависимости от энергии параметров аналитического выражения глубинного распределения дозы. Полученные оценки позволяют описать форму глубинного распределения дозы от 5 до 25 МэВ. Настоящий подход позволяет с хорошей точностью (максимальное отклонение не более 6%, площади под кривыми отличаются не более чем на 4%) осуществлять экстраполяцию.

Литература

1. Stearns M., Phys. Rev. 76, 836.
2. Bhabha H.J., Proc. Roy. Soc. A154, 195.
3. Moeller C., Ann. D. Phys. 14, 531.
4. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1988.
6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.
7. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций. М.: Наука, 1969.
8. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
9. Картан Анри. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких переменных. М.: ИЛ, 1963.
10. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1973.
11. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
12. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
13. L. Dusseau, G. Ranchoux, G. Polge, D. Plattard, F. Saigne, J. C Bessiere, J. Fesquet, J. Gasiot, "High Energy Electrons Dose-Mapping Using Optically Stimulable Luminescent Films", presented in NSREC 99.

**Белоусов Александр Витальевич
Грязнов Сергей Владимирович
Черняев Александр Петрович**

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ГЛУБИННОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОЗЫ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ЧЕРЕЗ
ВЕЩЕСТВО**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2003 – 20/733

Работа поступила в ОНТИ

ИД №00545 от 06.12.2003

Издательство

Учебно-научного центра довузовского образования

117246, Москва, ул. Обручева, 55А

Тел./факс (095) 718-7785

izdat@abiturcenter.ru

<http://abiturcenter.ru/izdat/>

Гигиенический сертификат №77.99.2.925.П.9139.2.00 от 24.02.2000

Налоговые льготы – Общероссийский классификатор продукции

ОК-005-93, том 1 – 953000

Подписано в печать

Формат 60x90/16

Тираж 50 экз. Заказ №

Отпечатано в Мини-типографии УНЦ ДО

<http://abiturcenter.ru/izdat/>

в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета