

Московский Государственный Университет  
имени М.В.Ломоносова

Научно-исследовательский институт ядерной физики  
имени Д.В.Скобельцына

**С.Г.Басиладзе**

**Пороговые и предельные  
информационные соотношения для сигналов**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2004 –20/759

Москва 2004

УДК 519.72 + 539.12

S.G.Basiladze

E-mail address: [basilad@monet.npi.msu.ru](mailto:basilad@monet.npi.msu.ru)

“The threshold and up-limit boundary informatics relations for the signals”  
Preprint NPI MSU 2004–20/759

Abstract:

It is known that classical signal is able to carry out an infinite amount of information. The so-called threshold and up-limit boundaries on linear and spectrum density of real signal energy are introduced in this paper for limitation of mentioned infinite value. Some distinguishes are discussed of a real signal as an information carrier. It is shown where the informatics boundaries may take effect in the signal transmitters and receivers; the formulas for possible number of signal states and data exchange speed are found. The difference between noise and threshold limitations is demonstrated.

С.Г.Басиладзе

“Пороговые и предельные информационные соотношения для сигналов”  
Препринт НИИЯФ МГУ – 2004 –20/759

Аннотация:

В работе обосновывается введение так называемых порогового и предельного ограничений, соответственно, на величину спектральной и линейной плотности энергии, которые устраняют бесконечную информационную емкость классического аналогового сигнала. Описывается ряд особенностей реальных сигналов как носителей информации. Показано, как действуют информационные ограничения в устройствах, передающих и принимающих сигналы; найдены выражения для возможного числа состояний и темпа передачи информации. Обсуждается различие между классическим шумовым и пороговым ограничениями.

© НИИЯФ МГУ

© Басиладзе С.Г.

## Введение

Современная теория сигналов достаточно хорошо и разносторонне развита. Она базируется с одной стороны на физике, так как носителями сигналов являются физические объекты, а с другой - на математике, предоставляющей абстрактный язык описания этих объектов. Как и многие другие, теория сигналов построена по образцу "классической" науки. Если говорить о физике, то корни существующей теории сигналов явно лежат в классической, а не в современной физике. Если же обратиться к математике, то это классический математический анализ, могущество которого, по образному выражению Пуанкаре, состоит "в умении обращаться с бесконечностями".

Парадокс, однако, состоит в том, что в современной науке необходимо не столько умение "обращаться" сколько умение *устранять* бесконечности, т.е. четко осознавать *границы* изучаемых явлений. Достаточно вспомнить, что появление теории относительности было связано с обнаружением *конечности* скорости распространения сигналов, а квантовая механика родилась из требования *конечности* ширины спектра (излучения в полости).

Приведем лишь два примера внутренних противоречий в теории сигналов, связанных с наличием бесконечностей. Одной из ее центральных теорем является теорема отсчетов [1-3], утверждающая, что сигнал с ограниченным спектром может быть математически точно разложен на сумму так называемых функций отсчетов [4] вида  $\sin(x)/x$  (показаны в правой колонке на рис.1). Функция отсчетов имеет плоский и резко ограниченный (обрезанный) спектр - примеры даны на рис.1 в левой колонке. Это означает, что разлагаемый сигнал также должен иметь *строго* ограниченный (обрезанный) спектр, иначе ни о каком точном разложении не может быть и речи. Неотъемлемым свойством сигналов с обрезанным спектром является наличие опережающих и запаздывающих колебаний (эффект Гиббса [4]). Это легко видеть на примере самой функции отсчетов, содержащей колебание -  $\sin(x)$ , начинающееся и заканчивающееся в бесконечности. Получается, что функция отсчетов, как сигнал, появляется *заведомо ранее* породившей ее причины, что совершенно неприемлемо в классике.

Вторым, вызывающим сомнение обстоятельством, является бесконечная информационная емкость классического аналогового сигнала. Положим, что необходимо передавать сигнал с собственным разрешением по амплитуде, равным  $1/m$  (т.е. имеющий  $m$ -градаций по амплитуде), а канал связи имеет избыточное разрешение ( $n$ -градаций, причем  $n \gg m$ ). Избыточность разрешения, как и избыточность быстродействия, можно использовать для увеличения количества информации, передаваемой по каналу, например, используя принцип арифметического кодирования [5]. В существующей

теории нет никаких внутренних ограничений на степень дробления амплитуды -  $n$ , за исключением ограничений, накладываемых внешними наводками и шумами. При отсутствии шумов теоретически возможно в одном отсчете закодировать всю мыслимую информацию [5] и еще останется бесконечно много места в запасе.

Нетрудно понять, что бесконечная информационная емкость "традиционного" сигнала вытекает из той математики, которой описываются его свойства, а именно, из базовых понятий классического математического анализа. Его исходным положением является представление о математической оси, как совокупности точек, *лишенных размера*, вследствие чего на любом отрезке (конечной длины) находится бесконечное количество точек. Поскольку в математическом анализе каждая точка по определению различима (иначе не имеет смысла говорить об их существовании), то каждый отрезок обладает свойством бесконечной делимости и приращение любой величины может быть бесконечно малым. Различимость бесконечно малых приращений классического сигнала означает, что он обладает бесконечным числом состояний и, следовательно, может нести в одном отсчете бесконечно большое количество информации. Представляется маловероятным, чтобы реальные сигналы в природе обладали столь явной информационной избыточностью. Скорее, факт отсутствия ограничений может говорить о неполноте существующей теории, поскольку не совсем ясно какие именно состояния может принимать реальный сигнал.

Ниже достаточно подробно показано, что для того, чтобы количество информации, переносимой сигналом, было конечным необходимо наличие так называемых *порогового* и *предельного* ограничений, соответственно, на величину спектральной и линейной плотности энергии сигнала. На основе этих ограничений могут быть найдены: максимальная ширина спектра, возможное число состояний сигнала и темп передачи информации.

Для удобства ознакомления с работой препроводим ее краткой справкой об основных параметрах классического сигнала.

### Классический сигнал и его разложение

В формальных математических переменных классический аналоговый сигнал есть непрерывная функция  $y=f(x)$ ; квадрат этой функции определяет приращение энергии сигнала на *малом* интервале  $\delta x$ :

$$\Delta E = y^2 * \delta x. \quad (1,а)$$

Сигнал и его энергия могут быть описаны и с использованием спектральной переменной ' $\chi$ ' (где  $\Delta\chi=1/\delta x$  есть *полная* ширина спектра - от нулевой гармоники [4]), тогда

$$\Delta E = g^2 * \Delta\chi, \quad (1,б)$$

здесь  $g$  - спектральная плотность амплитуды сигнала.

В соответствии с классическим условием причинности [6] спектр сигнала

должен быть непрерывным и бесконечным (тогда сигнал строго локализован по оси  $X$ ); он подчиняется также и условию конечности энергии, поэтому:

- а) спектральная плотность амплитуды его низших гармоник ограничена сверху, обычно она близка к  $g_0$  - "плотности амплитуды" его нулевой гармоники;
- б) в области высших гармоник 'g' спадает круче, чем  $1/\chi$  (тогда интеграл от (1,б) конечен).

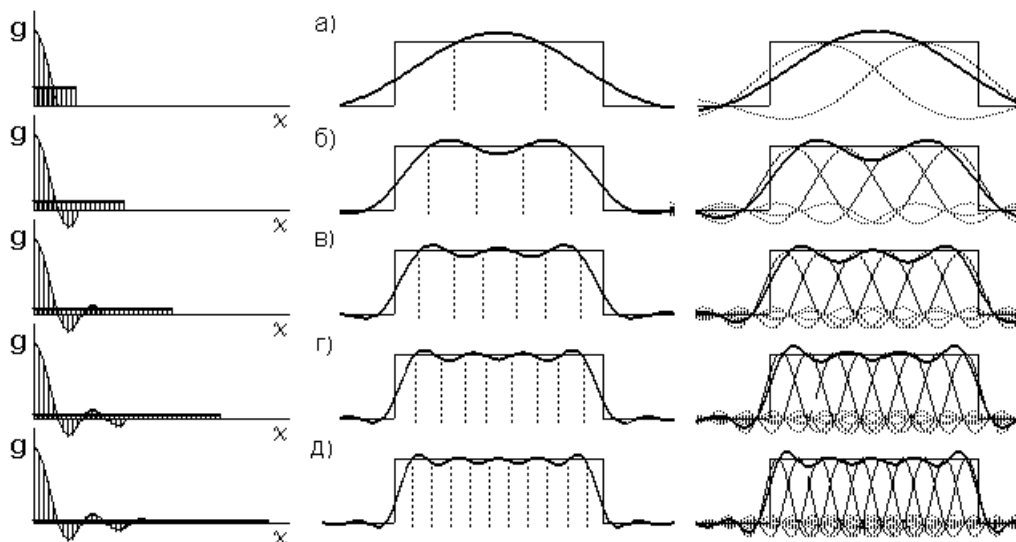


Рис.1. Разложение прямоугольного сигнала на функции отсчетов.

*Левая колонка:* обрезанный Фурье-спектр прямоугольного сигнала (вида  $\sin(\chi)/\chi$ ) и спектр (плоский) функции отсчетов, используемой для разложения; на каждом шаге ширина обоих спектров растет пропорционально его номеру и точность разложения возрастает.

*Средняя колонка:* форма квази-прямоугольного сигнала, полученного из Фурье-спектра; пунктирные линии показывают положение опорных точек, где сигнал совпадает с оригиналом.

*Правая колонка:* тот же квази-прямоугольный сигнал, полученный как сумма функций отсчетов (вида  $\sin(x)/x$ ), максимумы последних совпадают с опорными точками).

**Функция отсчетов как элемент разложения.** Теорема отсчетов формулируется следующим образом: любой сигнал с фактически (строго) ограниченным спектром шириной  $\Delta\chi_s$  может быть точно описан последовательностью амплитудных значений функций отсчетов, отстоящих на интервалы  $x=1/2\Delta\chi_s$  (т.е. функции разложения имеют вдвое более широкий спектр, чем у сигнала). Все промежуточные точки (между указанными *опорными* амплитудными значениями) находятся из суммы

значений всех функций отсчетов при заданном 'x'. Теорема отсчетов иллюстрируется рис.1, где показана серия разложений квази-прямоугольных (ограниченных по спектру за границей основной полосы) сигналов.

Информационное содержание теоремы отсчетов состоит в том, что она задает классическую *единицу длины* по оси абсцисс - в том смысле, что дробление X на интервалы, меньшие  $1/2\Delta\chi_s$ , не дает никаких новых сведений о разлагаемой функции, поскольку положение *всех* точек между опорными является *предсказуемым*.

**Короткий и длинный сигналы.** Классический сигнал обладает понятием *формы*, которая однозначно связана с формой его спектра. Информационно сигналы можно подразделить на *короткие* и *длинные*. Продолжительность ( $\Delta x$ ) коротких или  $\delta x$ -сигналов сопоставима с их фронтом и срезом -  $\delta x$  (т.е.  $\Delta x \approx 2\delta x$ ); крайним случаем короткого сигнала является функция отсчетов (огибающая вида  $\sin(x)/x$ , например - рис.1,а-б справа). У длинных или  $\Delta x$ -сигналов перепады намного короче продолжительности самих сигналов; крайним случаем длинного сигнала является прямоугольный импульс (спектр вида  $\sin(\chi)/\chi$  - рис.1,д слева).

Порядок разложения длинного сигнала. Как видно из рис.1,а, использование основной полосы спектра сигнала дает достаточно грубое приближение длинного сигнала. Более точно он может быть представлен когда учитываются гармоники за пределами основной полосы - рис.1,б-д. Прямоугольный сигнал можно разлагать бесконечно; остановившись на приемлемой по точности ступени разложения (L), мы будем иметь сигнал с обрезанным спектром, логическая длина которого равна L. Огибающая такого сигнала совпадает с оригиналом лишь в *конечном* числе точек - 2L (рис.1). Для отображения поведения оставшихся точек (а число их бесконечно) у реального сигнала не хватает информационной емкости.

## Реальный сигнал и его ограничения

Интуитивно понятно, что реальный сигнал должен иметь какие-то ограничения "сверху" и "снизу". Выяснить как именно они выглядят можно, если рассмотреть за счет чего появляются "расходимости" в количестве информации, которую способен переносить сигнал. Нам будет достаточно следующего простейшего определения информации: если на некотором интервале 'Y' в результате опыта (измерения) найдено, что измеряемая величина находится в пределах небольшого интервала  $\delta y$ , то приобретаемое количество информации [6] есть

$$I \leq \log(Y / \delta y). \quad (2)$$

Основываясь на (2) можно определенно утверждать, что математическая функция  $y(x)$  несет "трижды бесконечное" количество информации, поскольку

- а) 'Y' может принимать бесконечно большие значения (они неизбежны, если определена операция деления применительно к бесконечно малой);
- б)  $\delta y$  может принимать бесконечно малые значения;
- в) на каждом конечном интервале  $\delta x$  количество точек в функции  $y(x)$  бесконечно.

Нетрудно представить какие ограничения надо наложить на математическую функцию  $y(x)$ , чтобы количество информации стало конечным.

1. Очевидно, что необходимо наличие предельного ограничения [7], вытекающего из пункта а), на величину 'Y':

$$Y \leq \sqrt{R} \quad (3,а)$$

Легко видеть, что предельная постоянная

$$R = Y_{\max}^2 = (E / \delta x)_{\max} \quad (3,б)$$

есть наибольшая величина *линейной плотности* энергии сигнала.

2. Второе - пороговое ограничение [7] "закрывает" оба пункта б) и в), если его ввести в следующем виде

$$\delta x * \delta y \geq \sqrt{Q} \quad (4,а)$$

Если взять "первое отклонение" (от нуля), где  $\delta y = y$ , то с учетом (1,а) получим, что пороговая постоянная

$$Q = (y / \Delta \chi)_{\min}^2 = (E / \Delta \chi)_{\min} \quad (4,б)$$

есть наименьшая величина *спектральной плотности* энергии сигнала. Формально введенные в (3,а) и (4,а) квадратные корни как раз и отражают то обстоятельство, что и порог и предел вытекают из энерго-соотношений.

Если предельное ограничение достаточно очевидно, то пороговое ограничение может показаться несколько произвольным, однако, его выбор имеет определенные основания:

- а) произведение  $\delta x * \delta y$  отражает равную значимость разрешения по амплитуде -  $\delta y$  и разрешения по протяженности -  $\delta x$  для переноса информации сигналом (см. введение) и ограничивает их совместно;
- б) оба (пороговое и предельное) ограничения оказываются "симметрично" связанными с плотностью энергии.

Кроме того, данный вид порогового ограничения в явном виде проявляется при регистрации сигналов (см. ниже).

Вообще говоря, формулы (3,б) и (4,б) дают усредненные по  $\delta x$  или по  $\Delta \chi$  значения линейной или спектральной плотности энергии. Поэтому более точный смысл величины  $Q$  - это квадрат *площади* сигнала, что прямо следует из (4,а). Площадь сигнала, как известно [4], есть спектральная плотность амплитуды его *нулевой* гармоники -  $g_0$ , откуда  $Q = g_0^2$ . Отсюда следует, что совокупность пороговых сигналов дает любая "размазываемая" дельта-функция с  $g_0 = \sqrt{Q}$ . Частным случаем, сочетающим обе интерпретации  $Q$  (по площади и энергии), является функция отсчетов, имеющая плоский спектр.

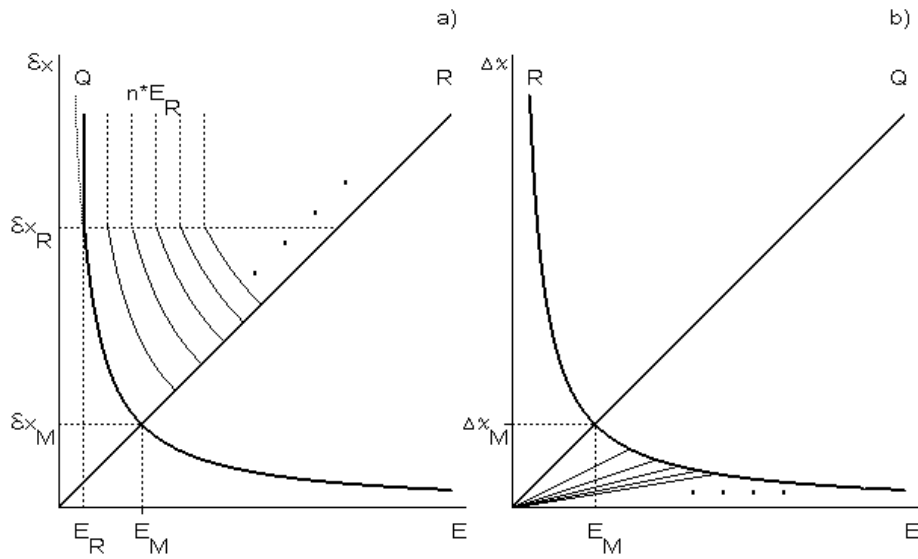


Рис.2. Пороговые – Q и предельные – R асимптоты сигнала для  
 а) интервалов, характеризующих быстродействие –  $\delta x$ ,  
 б) характеристической ширины спектров –  $\Delta \chi$ ,  
 в зависимости от величины энергии (короткого) сигнала – E;  
 тонкими кривыми показаны пять первых линий  $nQ$  в области  
 существования реальных сигналов;  
 вертикальные пунктирные линии в а) есть ступени различимости  
 пологого сигнала регистратором с параметрами  $\delta x_R, E_R$ ;  
 при наличии классического шума вместо  $E_R$  может присутствовать  
 $E_N$  - единичная энергия шума.

**Пороговые и предельные асимптоты сигнала.** Далее мы будем пользоваться плоскостью параметров сигнала с координатами  $[E_S, \delta x_S]$ ; здесь информационная единица длины  $\delta x_S = 1/\Delta \chi_S$  есть параметр, характеризующий *быстродействие*: это длительность перепадов, либо половина длительности функции разложения сигнала; а  $E_S$  - энергия сигнала на этом - "единичном" интервале  $\delta x_S$ . В каждой точке на указанной плоскости выполняются следующие соотношения для средней линейной и спектральной плотности энергии (записаны совместно):

$$R_S * \delta x_S = E_S = Q_S / \delta x_S; \quad (5,а,б)$$

Из (5,а,б) вытекает, что в каждой точке плоскости параметров квадрат  $E_S$  определяется произведением  $Q_S$  и  $R_S$ :

$$E_S^2 = Q_S * R_S. \quad (5,в)$$



Графически зависимость  $\delta x(E)$  при пороговых (4,б) ограничениях описывается гиперболой, а при предельных (3,б) ограничениях - прямой, выходящей из начала координат. В спектральной форме -  $\Delta\chi(E)$  пороговая и предельная линии меняются местами (см. рис.2,а,б); это именно та "симметрия" порога и предела, о которой упоминалось выше.

Минимум величины  $\delta x$  (или максимум  $\Delta\chi$ ) достигается когда  $y=Y_{\max}$ , т.е. в точке пересечения пороговой и предельной линий, тогда:

$$\delta x_M = \sqrt{Q/R}, \quad \text{или} \quad \Delta\chi_M = \sqrt{R/Q}, \quad (6,а)$$

что говорит об *абсолютной* ограниченности спектра реального сигнала. Если сигнал имеет меньшую амплитуду и находится на пороговой линии, то его быстрота еще более ограничена, но зависит от энергии:

$$\delta x \geq \sqrt{Q/y^2}, \quad \text{или} \quad \Delta\chi \leq \sqrt{y^2/Q}, \quad (6,б)$$

что следует из (4,а). Это наглядно видно на примере функции отсчетов, которая при обрезании спектра (снижении энергии - рис.3,в-а) расширяется и уменьшается по амплитуде (1), сохраняя "пороговую площадь" постоянной.

**Информационные особенности сигналов вблизи порога.** Пороговый сигнал обладает свойством *элементарности*, т.е. неразложимости на реальные составляющие. Показанная на рис.1 процедура разложения для него возможна лишь *формально* поскольку составляющие функции отсчетов явно подпороговые (виртуальные:  $g_i \ll g_0$ ).

Поскольку пороговый сигнал регистрируется как единое целое, то понятие *формы* для него фактически не определено. Можно с уверенностью говорить лишь об энергии сигнала и о спектральной плотности  $g_0$  его нулевой гармоники, определяющей пороговую площадь. Длительность или ширина спектра порогового сигнала определены характеристически ввиду аморфности последнего. Понятие формы имеется у предельных сигналов; они имеют постоянную амплитуду (рис.3,в-д) и могут быть представлены совокупностью функций отсчетов (с  $L \gg 1$ ).

Третье замечание можно сделать по поводу кажущегося нарушения условия причинности: хотя сигнал с обрезанным спектром начинается в минус бесконечности, зарегистрировать его "опережающие колебания" практически невозможно, т.к. они *подпороговые* (их площадь слишком мала).

Последнее касается следования канонам классического математического анализа. Помимо представления о лишенной размера точке в его основе лежит утверждение о линеаризации дифференцируемой функции при входе в зону бесконечно малых:

$$\delta y \approx f'(x) * \delta x, \quad (7)$$

где  $f'(x)$  - есть производная функции  $f(x)$ .

В силу (7) при  $\delta x \rightarrow 0$  и  $\delta y \rightarrow 0$ . Однако, в рассматриваемой области взаимозависимость между  $\delta x$  и  $\delta y$  выглядит совершенно по другому:  $\delta x$  и

ду не могут совместно принимать бесконечно малых значений (4,а). Поэтому математическое понятие *производной* в околопороговой области фактически теряет смысл для реального сигнала (для его энергии).

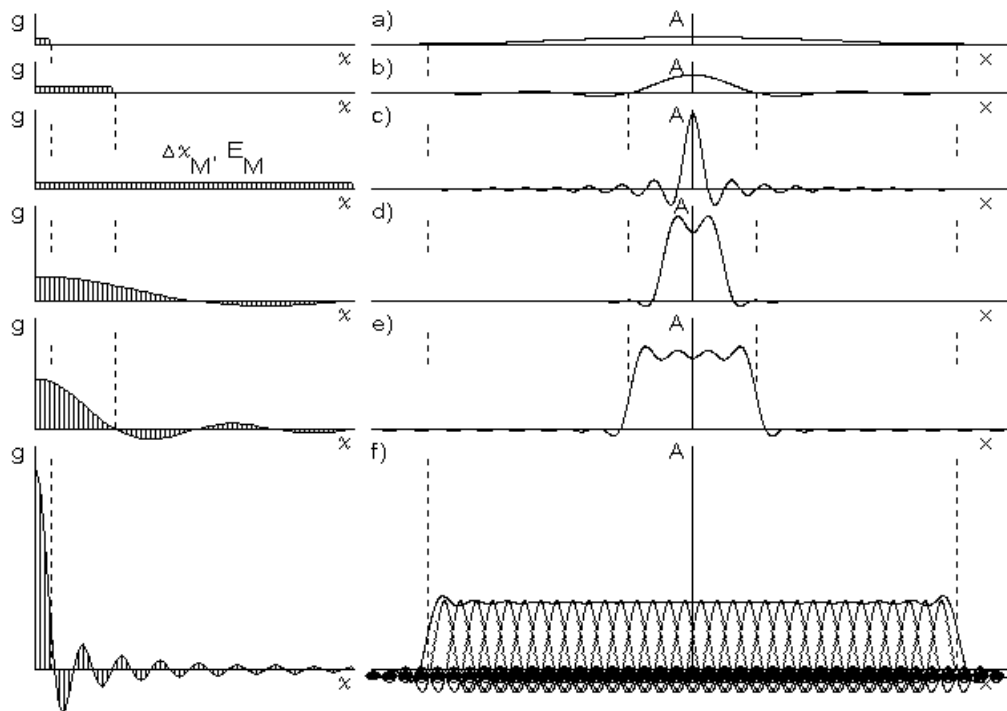


Рис.3. Переход сигнала из пороговой области (на примере функции отсчетов) в предельную:

- а),б),в) – в левой колонке иллюстрируется расширение спектра, а в правой колонке - рост амплитуды и сужение порогового сигнала при увеличении его энергии в пороговой области;
- г),д),е) – в правой колонке показано расширение сигнала и изменение его формы (из-за ограничения амплитуды), а в левой колонке - сужение спектра, при дальнейшем росте энергии уже в предельной области. Сигнал в г),д),е) может быть разложен на 2, 4 и 32 функции отсчетов с параметрами  $\Delta\chi_M$  и  $E_M$  – в).

Штриховые линии в а),б) демонстрируют соответствие ширины спектров и длины пороговых сигналов ширине спектров и длине предельных сигналов в д),е).

Как видно, например, из в), функция отсчетов имеет (бесконечные) опережающие и запаздывающие колебания, в которых заключено около 8% ее энергии.

Посмотрим, как действует абстрактно введенное пороговое ограничение в устройствах, принимающих сигналы.

## Пороговые ограничения при регистрации сигналов

Проанализируем работу приемника, как "нуль-органа", а именно его способность отличать наличие сигнала от его отсутствия или способность отличить один сигнал от другого.

Конкретное устройство приборов, регистрирующих сигналы, может быть самым различным, но все они имеют два общих и принципиальных свойства:

- а) любой регистратор воспринимает конечный по ширине спектр гармоник сигнала -  $\Delta\chi_R$ , остальные гармоники фильтруются (бесполезны);
- б) для срабатывания регистратора ему необходимо получить от сигнала определенную энергию -  $E_R$ .

Следовательно, обобщенная функциональная схема регистратора может быть представлена в виде двух последовательных звеньев: фильтра высших гармоник и дискриминатора по энергии, как это показано на рис.4.

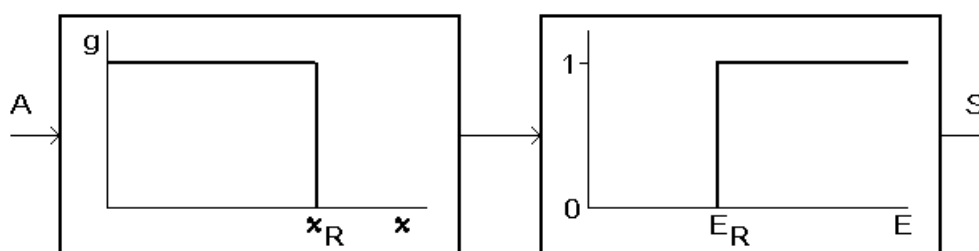


Рис.4. Обобщенная функциональная схема логического регистратора отклонений сигнала: A - аналоговый вход, S - логический выход; первое звено - фильтр гармоник  $\chi > \chi_R$ , второе звено - дискриминатор по энергии на уровне  $E_R$ .

**"Пологие" сигналы.** Если сигнал имеет значительно меньшую ширину спектра, чем прибор:  $\Delta\chi_S \ll \Delta\chi_R$ , то он не фильтруется и целиком проходит во второе звено. В этом случае срабатывание прибора определяется *текущей* величиной энергии сигнала и наступает сразу же, как только последняя становится больше  $E_R$ . На плоскости параметров такие - "пологие" сигналы лежат вверху справа от вертикальной прямой, проходящей через точку  $E_R$  на оси абсцисс - рис.2. Движение вниз по этой прямой возможно до достижения равенства:  $\Delta\chi_S = \Delta\chi_R$ .

**"Крутые" сигналы.** Если регистратор имеет меньшую ширину спектра, чем сигнал:  $\Delta\chi_S > \Delta\chi_R$ , то только часть энергии сигнала (от его нижних гармоник) пройдет во второе звено; как следствие, информация, содержащаяся в коротких деталях сигнала, будет утеряна. По мере роста  $\Delta\chi_S$



все большая и большая часть энергии такого - "крутого" сигнала будет отфильтрована, т.е. потеряна для регистрации.

Пороговое соотношение неопределимости. Для короткого сигнала или функции разложения высокого порядка спектральная плотность амплитуды практически постоянна, поэтому для срабатывания регистратора будет требоваться возрастающая энергия, *пропорциональная* ширине спектра сигнала:  $E_S \approx g_0 * \Delta\chi_S$  (хотя лишь малая часть ее будет реально использована регистратором). Следовательно, начиная с точки  $\Delta\chi_S = \Delta\chi_R$  линия параметров регистрируемого сигнала на рис.2 пойдет по гиперболе (Q) вправо-вниз от вертикальной прямой. Это значит, что в этой области приемник имеет пороговую информационную постоянную:

$$Q_R = E_R / \Delta\chi_R = E_R * \delta\chi_R. \quad (8,a)$$

Интервал обнаружения сигнала. Как видим, короткие (для приемника) сигналы все же могут быть зарегистрированы за счет роста их амплитуды; точнее, квадрат площади сигнала -  $Q_S$  должен быть больше  $Q_R$  - квадрата "пороговой площади" [7]. Соответственно, регистратор срабатывает не в интервале наличия сигнала, а заведомо *позже* - по прошествии интервала:

$$\delta\chi_R = Q_R / E_R = 1 / \Delta\chi_R, \quad (8,b)$$

требуемого для "набора пороговой площади". Для чувствительных, но медленных регистраторов интервал обнаружения может быть достаточно большим.

Биполярные крутые сигналы. Сигналы, лежащие в слое от  $\delta\chi_R$  до  $\delta\chi_M$ , интегрируются приемником (поскольку они лежат вне пределов его спектральной полосы) поэтому, если в интервале меньшем  $\delta\chi_R$ , появится несколько входных сигналов, то для регистратора они будут суммироваться не по амплитудам огибающих, а по *площадям*.

Представим, что имеется крутой биполярный сигнал или два коротких одинаковых сигнала противоположной полярности, отстоящих на расстояние, *существенно меньшее*  $\delta\chi_R$ . В подобной паре оба сигнала не будут зарегистрированы, даже если они надпороговые, ибо их суммарная площадь в интервале обнаружения нулевая.

**Количество состояний реального сигнала.** Предположим, что сигнал несет только подпороговые "детали", тогда они, как и сам сигнал, будут потеряны при регистрации. Точно также не будут восприняты детали, лежащие между гиперболами Q и 2Q на рис.2 (хотя сам сигнал уже будет воспринят) потому, что невозможно определить *разность* между пороговым сигналом и сигналом, лежащим ниже гиперболы 2Q. Следующий "слой" неразличимости лежит в границах от 2Q до 3Q и так далее.

Следовательно, линии  $n*Q$  (n - целое число) задают информационные состояния сигнала (начиная с порогового) и только они являются различимыми. Ограничиваемые пороговой и предельной асимптотами области, где реальный сигнал удовлетворяет информационным

ограничениям, на рис.2 заполнены линиями, идущими с шагом Q (на рис.2,а это гиперболы, а на рис.2,б - прямые).

**Дробность сигнала.** Вверху области существования (для пологих сигналов) на рис.2,а имеется возможность независимо, как и в классике, увеличивать энергию (амплитуду) сигнала или его протяженность, т.е. двигаться вправо или вверх от пороговой линии, с той лишь разницей, что приращение  $\Delta E$  может быть только дискретным (по линиям  $n*Q$ ). Из сказанного выше ясно, что на регистрацию сигнала всегда "расходуется" одно его состояние. Поэтому число 'n' фактически показывает сколько раз сигнал может быть обнаружен.

По мере продвижения вправо-вверх относительный вклад дискретов понижается и параметры реального сигнала начинают меняться практически непрерывно. Это область существования квази-классических - пологих сигналов с очень высокой "дробностью" (пренебрежимо малой Q).

**Информационная способность сигнала.** На пороговой гиперболе сигнал имеет только 2 состояния (он есть или его нет). Это значит, что на *каждом интервале*  $\delta x$  он может нести 1 бит информации, а на интервале  $\Delta x = L * \delta x$  - L бит (независимо от того сколько раз он появился - один или L-раз). При движении вправо по горизонтали (до предельной прямой) количество возможных состояний сигнала, как нетрудно убедиться, равно  $n = (\delta x / \delta x_M)^2$ , где  $\delta x_M$  находится из (6). Для точки пересечения пороговой гиперболы и прямой регистрации -  $[E_R, \delta x_R]$  на рис.2, возможная плотность информации (по оси X):

$$\Delta I / \Delta x = \log(1 + (\delta x_R / \delta x_M)^2) / \delta x_R. \quad (9,а)$$

Ниже указанной точки значение  $\delta x$  в знаменателе (9,а) остается равным  $\delta x_R$  (потому что на регистрацию сигнала всегда тратится интервал  $\delta x_R$ ), а под знаком логарифма снижается вплоть до  $\delta x_M$ ; в результате, информационная способность сигнала уменьшается до  $\Delta I / \Delta x = \log(2) / \delta x_R$ .

Если имеется возможность понижения величины  $\delta x_R$  (повышения быстродействия приемника), то целесообразно достичь равенства  $\delta x_R = \delta x_M$  (точка  $[E_R, \delta x_R]$  будет лежать на предельной прямой), тогда

$$\Delta I / \Delta x = \log(2) / \delta x_M = \log(2) * \sqrt{R / Q}. \quad (9,б)$$

Хотя сигнал имеет всего 2 состояния, возможная плотность информации здесь выше, чем при кодировании по амплитуде (9,а), в силу неравенства:  $2 * \log(\delta x_R / \delta x_M) < (\delta x_R / \delta x_M) * \log(2)$  при  $\delta x_R \gg \delta x_M$ . Например, если в (9,а)  $\delta x_R = 100 * \delta x_M$ , то информационная способность будет различаться в ~8 раз.

### Физические сигналы и их ограничения

Перейдем от формальных математических переменных к конкретным физическим величинам. Физически величиной 'x' может быть время - t или

координата -  $r$ . Линейная плотность энергии ( $R_S$ ) во времени есть мощность -  $P$ , а в пространстве мы будем обозначать ее через 'D'. Спектральная плотность энергии сигнала ( $Q_S$ ) во времени есть действие -  $H$ , а в пространстве мы будем обозначать ее через 'B'. Как видим, информацию могут нести не только динамические сигналы - с параметрами  $[E, \delta t]$ , но и *статические* - с параметрами  $[E, \delta r]$ . Для динамических сигналов пороговая постоянная появляется как только, из-за недостатка *быстроты* (ширины спектра частот) регистратора, начинается потеря информации (и энергии), содержащейся в сигнале. У статических сигналов пороговые ограничения порождаются ограниченностью ширины спектра пространственных гармоник (спектра волновых чисел) сигнала.

Заметим, что у пространственно протяженных -  $\{B, D\}$  сигналов, движущихся со скоростью  $V$ , появляются динамические параметры  $H_V$  и  $P_V$ :

$$H_V = B / V \quad \text{и} \quad P_V = D * V. \quad (10, a, б)$$

При скорости  $V_{II} = B/H$  параметр действия  $H_V$  становится пороговым ( $H_V = H$ ), а  $P_V$  имеет максимум:  $P_{max} = D * V_{II}$ .

Линейная плотность энергии  $R_S$ , а во времени это мощность, есть очевидное ограничение любого технического устройства, генерирующего динамические сигналы. Совокупность пороговых ограничений при приеме и предельных ограничений при передаче определяют пропускную способность канала передачи информации.

Положим, что максимальный уровень мощности при передаче  $P_S = 10$  мкВт; она каналируется в приемник с полосой частот 1 ГГц ( $\delta t_R = 10^{-9}$  с) и минимальными величинами входного напряжения и тока: 10 мкВ и 10 мкА, соответственно. Тогда единичная энергия принимаемого сигнала составит:  $E_R = 10^{-19}$  дж, а пороговая постоянная, соответственно:  $H_R = E_R * \delta t_R = 10^{-28}$  дж\*с. Точка пересечения пороговой гиперболы и предельной прямой будет иметь координаты:  $E_M = \sqrt{P_S * H_R} = 3,16 * 10^{-17}$  дж, а  $\delta t_M = \sqrt{H_R / P_S} = 3,16 * 10^{-12}$  с. В этом случае число возможных состояний  $n = 10^5$  (на уровне  $\delta t_R$ ), а максимальная пропускная способность канала связи (9,а) составит: 16 Гбит/с. Если поднять быстродействие до  $\delta t_R = \delta t_M = 3,16 * 10^{-12}$  с (при  $P_S = 10$  мкВт), то пропускная способность существенно вырастет (9,б) - до 316 Гбит/с.

При передаче сигналов через пространство (радиопередача) мощность на входе приемника будет падать (в наихудшем случае) пропорционально квадрату расстояния до передатчика и информационная пропускная способность будет снижаться, но достаточно слабо (поскольку в 16 Гбит/с один Гбит/с обеспечивается за счет  $\delta t_R$ , а не  $P_S$ ). Так, на расстоянии до передатчика, меньшем в 316 раз, уровень предельной мощности составит  $P_S = 1$  Вт, соответственно,  $E_M = 10^{-14}$  дж и  $\delta t_M = 10^{-14}$  с. Количество возможных состояний будет равно:  $n = 10^{10}$  (хотя и  $10^5$  может быть избыточным числом состояний для одного сигнала); пропускная способность канала связи увеличится, но всего вдвое.

**Ограничения, создаваемые шумом.** Все известные физические носители сигналов обладают определенным уровнем шума, т.е. содержат некоторую неупорядоченную фоновую энергию.

Для электрических сигналов имеется два основных вида шумов: тепловой, средняя мощность которого [8]:

$$\langle P \rangle = 4k \cdot T \cdot \Delta f_N, \quad (11,а)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана,

$T$  - абсолютная температура,

$\Delta f$  - полоса частот ( $\Delta \chi$  в физическом представлении - во времени);

а также дробовой шум, порождаемый дискретностью носителей заряда, со средней мощностью [9]:

$$\langle P \rangle = 2e \cdot \Delta U \cdot \Delta f_N, \quad (11,б)$$

где  $e$  - заряд электрона,

$\Delta U$  - проходимая носителями разность потенциалов.

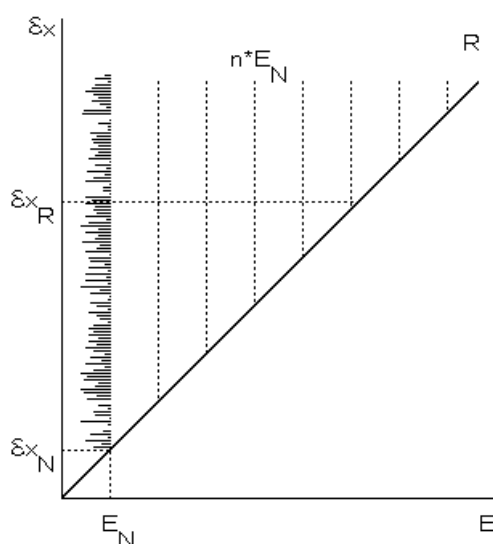


Рис.5. Шумовая вертикаль (отмечена штриховкой) и предельная асимптота, пунктирными вертикальными прямыми показаны семь первых состояний в области существования классических сигналов;

При постоянных условиях ( $T=\text{const}$ ,  $\Delta U=\text{const}$ ) энергия  $E_N$  постоянна, поэтому в обоих случаях на плоскости  $[E, \delta t]$  линия шума есть вертикальная прямая, показанная на рис.5. На этой прямой средняя мощность и среднее действие не являются константами и определяются из уравнений, аналогичных (5,а,б):

В обоих случаях параметром шума является некоторая величина энергии -  $E_N$ ; для теплового шума это  $4k \cdot T$ , а для дробового -  $2e \cdot \Delta U$ . Из (11) ясно, что



$E_N$  это средняя энергия шумовой линии на "единичном" интервале  $\delta t_N = 1/\Delta f_N$ . Если задаться "типовыми" значениями:  $T=300^0$  К и  $\Delta U=1$  В, то единичная энергия теплового шума будет равна:  $E_N=1,6*10^{-20}$  дж, а у дробового шума она будет выше в 19 раз. Поэтому при генерации сигналов ( $\Delta U \gg 1$  В) основной вклад дает дробовой шум, а при их приеме ( $\Delta U \ll 1$  В) - тепловой (для приведенного выше примера он в 6 раз меньше, чем  $E_R$ , т.е. пренебрежимо мал).

$$\langle P_N \rangle / \Delta f_N = E_N = \langle H_N \rangle * \Delta f_N. \quad (12,а,б)$$

Учитывая (12) и то, что на границе пологих и крутых сигналов  $H_N=H_R$  нетрудно убедиться, что формула (9,а) при наличии шума переходит в формулу Шеннона [10]:

$$(\Delta I / \delta x)_{\max} = \log(1 + (P_s / \langle P_N \rangle)) / \delta x_R, \quad (13)$$

Это вполне логично поскольку именно размытость шумовой линии задает здесь ширину интервалов между вертикальными линиями состояний -  $n * E_N$ , но по умолчанию предполагает, что  $E_N > E_R$ .

### Заключение

В мире макро-масштабов объекты и явления реализуются на носителях, чьи характеристические размеры, величина собственной и шумовой энергии пренебрежимо малы по сравнению с масштабом самих явлений. Это порождает иллюзию того, что описание реальности может быть "точным" и в свое время породило математическую абстракцию непрерывной функции непрерывных переменных, состоящей из бесконечной совокупности точек.

Можно определенно утверждать, что информационные понятия порога и предела являются всеобщими категориями. Пороговая и предельная информационные постоянные задают область существования, а точнее, диапазон различных состояний каждого природного явления. Если предельные ограничения легко могут быть представлены в обычной теории сигналов, то пороговые явно выходят за рамки классической теории. Пороговые ограничения существуют независимо от наличия шумов в силу того, что полоса частот приемника не может быть бесконечно большой, а энергия, подводимая к его входу, не может быть бесконечно малой.

Несмотря на наличие определенного порога, достаточно медленный, но очень чувствительный прибор в состоянии регистрировать очень короткие (но надпороговые для него) сигналы. Темп регистрации при этом, конечно, будет достаточно низким.

Для обеспечения максимального темпа приема произведение полосы частот прибора на потребляемую им от сигнала "единичную" энергию должно соответствовать мощности принимаемого сигнала. Максимальный темп приема достигается не при кодировании амплитуды, а при двоичном кодировании сигнала во времени - вблизи точки пересечения пороговой и

предельной линий на плоскости параметров  $[E, \delta t]$ .

Для существенного повышения быстродействия необходимо понижать пространственные размеры элементов и передатчика и приемника, а это значит уходить в область субмикронных размеров. Однако, если в макромире имеется возможность (и то не всегда) отвлекаться от наличия пороговых и предельных ограничений, то в микромире, в силу малости масштабов явлений, это невозможно в принципе. Пороговая постоянная в микромире имеет минимально возможную в природе величину (постоянная Планка), в то время как предельные постоянные должны быть максимальны. Хотя уровни порогов и пределов в современной технике далеко не достигают их естественных аналогов (на 3-6 десятичных порядков), для нанотехнологий эти - естественные ограничения могут стать весьма существенными.

### Литература

1. E.T.Whittaker, Proc.Roy.Soc., Edinburg, V35, 1915, p.181-184.
2. R.V.L.Hartley, Bell System Tech. Journal,7,3, 1928, p.535-563.
3. В.А.Котельников, О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи, Материалы к 1-му Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. Изд-во "Ред.связи РККА", 1933.
4. И.С.Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и Связь, 1986.
5. Н.Винер. Кибернетика. М.: Наука, 1983.
6. J.M.Witten, R.M.Neal, J.G.Cleary. Communication of the ACM, June 1987, V.30 No 6, p.520-540.
7. С.Г.Басиладзе, Сигнал, данные и информация в физических измерениях, Физика Элементарных Частиц и Атомного Ядра, 2000, том 31, вып.3.
8. H.Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. Phys.Rev., 1928, V.32 No 1. P.110-113.
9. A.Gilespi, Signal, noise and resolution in nuclear counter amplifiers, Pergamon press, 1953.

10. C.E.Shannon. A mathematical theory of communications. Bell System Tech. Journal, 1948, 27, P.379-423.

Басиладзе Сергей Геннадьевич

**Пороговые и предельные  
информационные соотношения для сигналов**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2004 –20/759

Работа поступила в ОНТИ 15.11.2004 г.

**Издательство УНЦ ДО**

117, Москва, ул.Обручева, 55А  
Тел./Факс (095)718-69666 718-7785  
E-mail: [izdat@abiturcentr.ru](mailto:izdat@abiturcentr.ru)  
<http://abiturcentr.ru/izdat/>

Подписано в печать  
Тираж 50 экз.

Отпечатано в мини-типографии УНЦ ДО  
<http://abiturcentr.ru/izdat/>  
в полном соответствии с качеством  
представленного оригинал-макета