

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ имени Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

М.Н. Дубинин, Е.Ю. Петрова

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ДЛЯ
ПОТЕНЦИАЛА ХИГГСА ДВУХДУБЛЕТНОЙ МОДЕЛИ

Препринт НИИЯФ МГУ № 2014 – 3/887

Москва, 2014 г.

УДК 539.1.03

М.Н. Дубинин, Е.Ю. Петрова

e-mail: dubinin@theory.sinp.msu.ru

**КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ДЛЯ
ПОТЕНЦИАЛА ХИГГСА ДВУХДУБЛЕТНОЙ МОДЕЛИ**

Препринт НИИЯФ МГУ № 2014 – 3/887

Аннотация

Теория катастроф, описывающая внезапные скачкообразные изменения системы, имеет хорошо разработанные методы исследования ее критических режимов. Применение этих методов к конечнотемпературному эффективному потенциалу Хиггса минимальной суперсимметричной стандартной модели приводит к интересным результатам. Настоящая работа посвящена получению нелинейных осесохраняющих преобразований, приводящих конечнотемпературный эффективный потенциал Хиггса к каноническим формам теории катастроф.

M. Dubinin, E. Petrova

**CANONICAL FORMS OF THE CATASTROPHE THEORY FOR THE
TWO-HIGGS DOUBLET MODEL POTENTIAL**

Preprint MSU SINP N 2014 – 3/887

Abstract

The catastrophe theory describing sudden abrupt changes of a system has well-developed methods of investigation of the critical regimes. An application of these methods to the minimal supersymmetric standard model finite-temperature Higgs potential gives some interesting results. The nonlinear axes-conserving transformations are derived, which reduce the finite-temperature Higgs potential to canonical forms of the catastrophe theory.

© М.Н. Дубинин, Е.Ю. Петрова

© НИИЯФ МГУ, 2014, <http://www.sinp.msu.ru>

Введение

Поскольку на сегодняшний день достоверно известно, что Вселенная расширяется, разумно предположить, что в прошлом наша Вселенная была значительно меньше и горячее. В рамках теории горячего Большого Взрыва предполагается, что вещество (фундаментальные фермионы, бозоны и скалярные частицы) первоначально было разогрето до высоких температур ($T \geq 100$ ГэВ). Причем плотностью свободной энергии вещества при температуре T в рамках термодинамического описания является эффективный хиггсовский потенциал $V_{eff}(\phi, T)$ при условии, что среднее хиггсовское поле принимает некоторое значение всюду в пространстве. Изучение этого потенциала представляет как академический интерес, так и приводит к проверяемым на современных ускорителях предсказаниям.

Другая причина изучения функции $V_{eff}(\phi, T)$ связана с фазовыми переходами и барионной асимметрией Вселенной [1]. Если существовали температуры порядка $M_{EW} \sim 100$ ГэВ, то электрослабая симметрия $SU(2) \times U(1)$ не была нарушена, и среднее значение поля Хиггса v было нулевым. Однако, хорошо известно, что на сегодняшний день ненарушенной симметрией является $U(1)_{em}$ и $v = 246$ ГэВ. Эти факты дают основания полагать, что в ранней Вселенной мог произойти электрослабый фазовый переход [2], [3]. Изучение этого процесса может пролить свет на некоторые загадки современной теоретической физики: генерацию барионного числа, проблему темной материи, образование масс нейтрино, возникновение топологических дефектов в ранней Вселенной, понимание процессов в некоторых инфляционных моделях, - а также детально проанализировать процесс возникновения масс бозонов.

При этом необходимо, чтобы в ранней Вселенной выполнялись условия, сформулированные А.Д. Сахаровым в 1966 г. [4]: 1) несохранение барионного числа; 2) нарушение C и CP инвариантности; 3) отклонение от теплового равновесия, - а также, величина $B-L$ должна сохраняться (отсутствие вымывания барионной асимметрии). При этом условие (3) выполняется только во время фазового перехода I рода [3].

Изучение электрослабого фазового перехода целесообразно проводить в рамках теории катастроф (ТК), дающей универсальный метод исследования всех скачкообразных переходов и внезапных качественных изменений системы [5]. Здесь стоит отметить, что ТК не заменяет традиционные методы, а дает новое направление в рамках анализа для выявления качественных закономерностей и получения количественных результатов.

Работа состоит из четырех частей, Приложения и Заключения. В первой части изложены необходимые для данной работы элементы двухдублетной и минимальной суперсимметричной стандартной модели. Во второй части, сформулированы теоремы теории катастроф, в третьей и четвертой частях получены нелинейные преобразования, приводящие к каноническим формам Морса и Тома. В Заключении кратко изложены основные результаты работы. Приложение содержит необходимые выкладки по получению нелинейных преобразований части 3 данной работы.

1 Эффективный потенциал Хиггса двухдублетной модели и МССМ

Минимальное расширение СМ содержит два дублета хиггсовских полей

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+(x) \\ \phi_1^0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega_1^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + \eta_1 + i\chi_1) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\Phi_2 = e^{i\xi} \begin{pmatrix} \phi_2^+(x) \\ \phi_2^0(x) \end{pmatrix} = e^{i\xi} \begin{pmatrix} -i\omega_2^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\xi}v_2 + \eta_2 + i\chi_2) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2, \quad \frac{v_2}{v_1} = \text{tg } \beta \quad (3)$$

и поля $\eta_{1,2}, \chi_{1,2}$ осциллируют вблизи вакуумных конденсатов $v_{1,2}$. Углы относительно разворота вакуумных ожиданий ζ , а также относительно поворота дублетов ξ приводят к дополнительному спонтанному нарушению CP -инвариантности.

Тогда $SU(2) \times U(1)$ -перенормируемый потенциал Хиггса имеет вид

$$\begin{aligned} U(\Phi_1, \Phi_2) = & -\mu_1^2(\Phi_1^\dagger\Phi_1) - \mu_2^2(\Phi_2^\dagger\Phi_2) - \mu_{12}^2(\Phi_1^\dagger\Phi_2) - \mu_{12}^{*2}(\Phi_2^\dagger\Phi_1) \\ & + \lambda_1(\Phi_1^\dagger\Phi_1)^2 + \lambda_2(\Phi_2^\dagger\Phi_2)^2 + \lambda_3(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_2) + \lambda_4(\Phi_1^\dagger\Phi_2)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) + \\ & + \frac{\lambda_5}{2}(\Phi_1^\dagger\Phi_2)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \frac{\lambda_5^*}{2}(\Phi_2^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) + \\ & + \lambda_6(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \lambda_6^*(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) + \lambda_7(\Phi_2^\dagger\Phi_2)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \lambda_7^*(\Phi_2^\dagger\Phi_2)(\Phi_2^\dagger\Phi_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где параметры μ_{12}^2 и λ_5, λ_6 и λ_7 могут быть комплексными (явное нарушение CP -инвариантности) [6].

В частном случае ДДМ – МССМ – значения λ_i ($i = 1, \dots, 7$) заданы на энергетическом масштабе M_{SUSY} порядка масс суперпартнеров

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{(g_1^2 + g_2^2)}{8}, \quad \lambda_3 = \frac{g_2^2 - g_1^2}{4}, \quad \lambda_4 = -\frac{g_2^2}{2}, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0. \quad (5)$$

Эволюция параметров λ определяется уравнениями ренормализационной группы (РГУ), где условия (5) играют роль граничных условий для РГУ, а ниже M_{SUSY} суперсимметричные соотношения нарушаются конечными квантовыми эффектами, обусловленных взаимодействием бозонов Хиггса с третьим поколением скварков [7].

Температурная зависимость $U(\Phi_1, \Phi_2, T)$ возникает при учете однопетлевых температурных поправок к массам скалярных полей и их вершинам взаимодействия путем явного расчета однопетлевых диаграмм с четырьмя внешними линиями и последующей диагонализации массовой матрицы [8]. А именно, температура учитывается в частотах Мацубара $\omega_n = 2\pi nT$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), содержащихся в бозонных пропэгаторах и проводящих к структуре вида

$$I_1[M_a, M_b] = -\frac{1}{64\pi^4 T^2} \int_0^1 dx x \zeta\left[2, \frac{3}{2}, (M_a^2 - M_b^2)x + M_b^2\right], \quad (6)$$

$$I_2[M_a, M_b] = \frac{3}{256\pi^6 T^4} \int_0^1 dx x (1-x) \zeta\left[2, \frac{5}{2}, (M_a^2 - M_b^2)x + M_b^2\right], \quad (7)$$

где $\zeta(u, s, t)$ – интегралы обобщенной функции Гурвица, g_1, g_2 – константы связи калибровочных групп U(1) и SU(2), h_t, h_b – константы Юкавы СМ, μ параметр хиггсовского суперполя, A_t, A_b трилинейные параметры взаимодействия суперпартнеров кварков с полями Хиггса в членах мягкого нарушения суперсимметрии, m_Q, m_U, m_D массовые параметры скалярных суперпартнеров кварков.

Таким образом, температурная зависимость ”спрятана” в параметрах λ (см. [8], рис. 1). Например, λ_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & \frac{g_1^2 + g_2^2}{8} - 3h_t^4 |A_t|^4 I_2[m_Q, m_U] - 3h_b^4 |\mu|^4 I_2[m_Q, m_D] \\ & - h_b^2 |\mu|^2 \left(\frac{g_1^2 + 3g_2^2}{2} I_1[m_Q, m_D] + g_1^2 I_1[m_D, m_Q] \right) \\ & - h_t^2 |A_t|^2 \left(\frac{12h_t^2 + g_1^2 - 3g_2^2}{2} I_1[m_Q, m_U] + (6h_t^2 - 2g_1^2) I_1[m_U, m_Q] \right). \end{aligned} \quad (8)$$

При $\xi + \eta = 0$ потенциал Хиггса (4) в пространстве вакуумных ожиданий

$$\langle \Phi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1(T) \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2(T) \end{pmatrix} \quad (9)$$

имеет вид, где $\lambda_{345} = \lambda_3 + \lambda_4 + \text{Re} \lambda_5$:

$$\begin{aligned} U_{eff}(v_1, v_2) = & -\frac{1}{2} \mu_1^2 v_1^2 - \frac{1}{2} \mu_2^2 v_2^2 - \text{Re} \mu_{12}^2 v_1 v_2 \\ & + \frac{1}{4} \lambda_1 v_1^4 + \frac{1}{4} \lambda_2 v_2^4 + \frac{1}{4} \lambda_{345} v_1^2 v_2^2 + \frac{1}{2} \text{Re} \lambda_6 v_1^3 v_2 + \frac{1}{2} \text{Re} \lambda_7 v_1 v_2^3. \end{aligned} \quad (10)$$

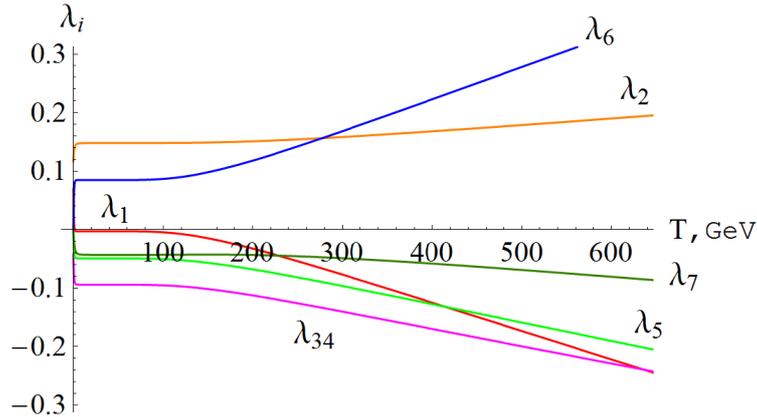


Рис. 1: Зависимость параметров λ от температуры. Здесь $m_Q = 900$ ГэВ, $m_U = 600$ ГэВ, $m_D = 1000$ ГэВ, $\text{tg} \beta = 5$, $v = 246$ ГэВ.

Условие минимума $\nabla U(v_1, v_2, T) = 0$ накладывает связи на параметры размерности ”два”

$$\begin{aligned}\mu_1^2 &= \lambda_1 v_1^2 + \lambda_{345} \frac{v_2^2}{2} - \text{Re} \mu_{12}^2 \frac{v_2}{v_1} + \frac{1}{2} (3\text{Re} \lambda_6 v_1 v_2 + \text{Re} \lambda_7 \frac{v_2^3}{v_1}), \\ \mu_2^2 &= \lambda_2 v_2^2 + \lambda_{345} \frac{v_1^2}{2} - \text{Re} \mu_{12}^2 \frac{v_1}{v_2} + \frac{1}{2} (\text{Re} \lambda_6 \frac{v_1^3}{v_2} + 3\text{Re} \lambda_7 v_1 v_2).\end{aligned}\quad (11)$$

Условия (11) не приводят к аналитическим формам в минимуме, однако, если потенциал Хиггса (4) инвариантен относительно группы $SU(2) \times U(1) \times U(1)_{PQ} \times Z_2$, т.е.

$$\begin{aligned}U(\Phi_1, \Phi_2) &= -\mu_1^2 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) - \mu_2^2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2) \\ &+ \lambda_1 (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + \lambda_2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2) + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) (\Phi_2^\dagger \Phi_1),\end{aligned}\quad (12)$$

то уравнения (11) факторизуются

$$\begin{aligned}v_1 (\lambda_1 v_1^2 + \frac{\lambda_{345}}{2} v_2^2 - \mu_1^2) &= 0, \\ v_2 (\lambda_2 v_2^2 + \frac{\lambda_{345}}{2} v_1^2 - \mu_2^2) &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

и определяют четыре набора критических точек (таблица 1, см. [8]).

При наложении связей (11) потенциал Хиггса (10) принимает экстремальные значения, однако в отличие от одномерного случая СМ, возникает так называемая экстремальная поверхность потенциала Хиггса, явный вид которой можно получить методом неопределенных множителей Лагранжа

$$U^\lambda(v_1, v_2) = -\frac{1}{4} \lambda_1 v_1^4 - \frac{1}{4} \lambda_2 v_2^4 - \frac{1}{4} \lambda_{345} v_1^2 v_2^2 - \frac{1}{2} \text{Re} \lambda_6 v_1^3 v_2 - \frac{1}{2} \text{Re} \lambda_7 v_1 v_2^3. \quad (14)$$

Последняя имеет два выраженных минимума при $T = 0$ или седловую конфигурацию при $T \sim T_c$, свидетельствующую о неустойчивом равновесном состоянии системы, где T_c - характерная температура электрослабого фазового перехода (см. рис. 2). Видно, что в отличие от радиационных конечнотемпературные поправки к λ существенно меняют конфигурацию минимума потенциала. Остывание первично разогретого вещества приводит к возникновению минимума (минимумов) и его последующей эволюции по некоторой траектории.

	Решение (13)	Гессиан	Условия минимума
1	$v_1 = 0, \quad v_2 = 0$	$-\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{pmatrix}$	$\mu_1^2 + \mu_2^2 < 0, \quad \mu_1^2 \cdot \mu_2^2 \geq 0$
2	$v_1 = 0, \quad \lambda_2 v_2^2 - \mu_2^2 = 0$	$\begin{pmatrix} -\mu_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_{345}v_2^2 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 v_2^2 \end{pmatrix}$	$-\mu_1^2 + v_2^2(2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_{345}) > 0$ $(-\mu_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_{345}v_2^2)\lambda_2 v_2^2 \geq 0$
3	$v_2 = 0, \quad \lambda_1 v_1^2 - \mu_1^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_1^2 & 0 \\ 0 & -\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_{345}v_1^2 \end{pmatrix}$	$-\mu_2^2 + v_1^2(2\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_{345}) > 0$ $(-\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_{345}v_1^2)\lambda_1 v_1^2 \geq 0$
4	$\lambda_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_{345}v_2^2 - \mu_1^2 = 0$ $\lambda_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_{345}v_1^2 - \mu_2^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_1^2 & \lambda_{345}v_1 v_2 \\ \lambda_{345}v_1 v_2 & 2\lambda_2 v_2^2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 > 0$ $v_1^2 v_2^2 (4\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{345}^2) \geq 0$

Таблица 1: Условия локального минимума для четырех типов решений системы (13).

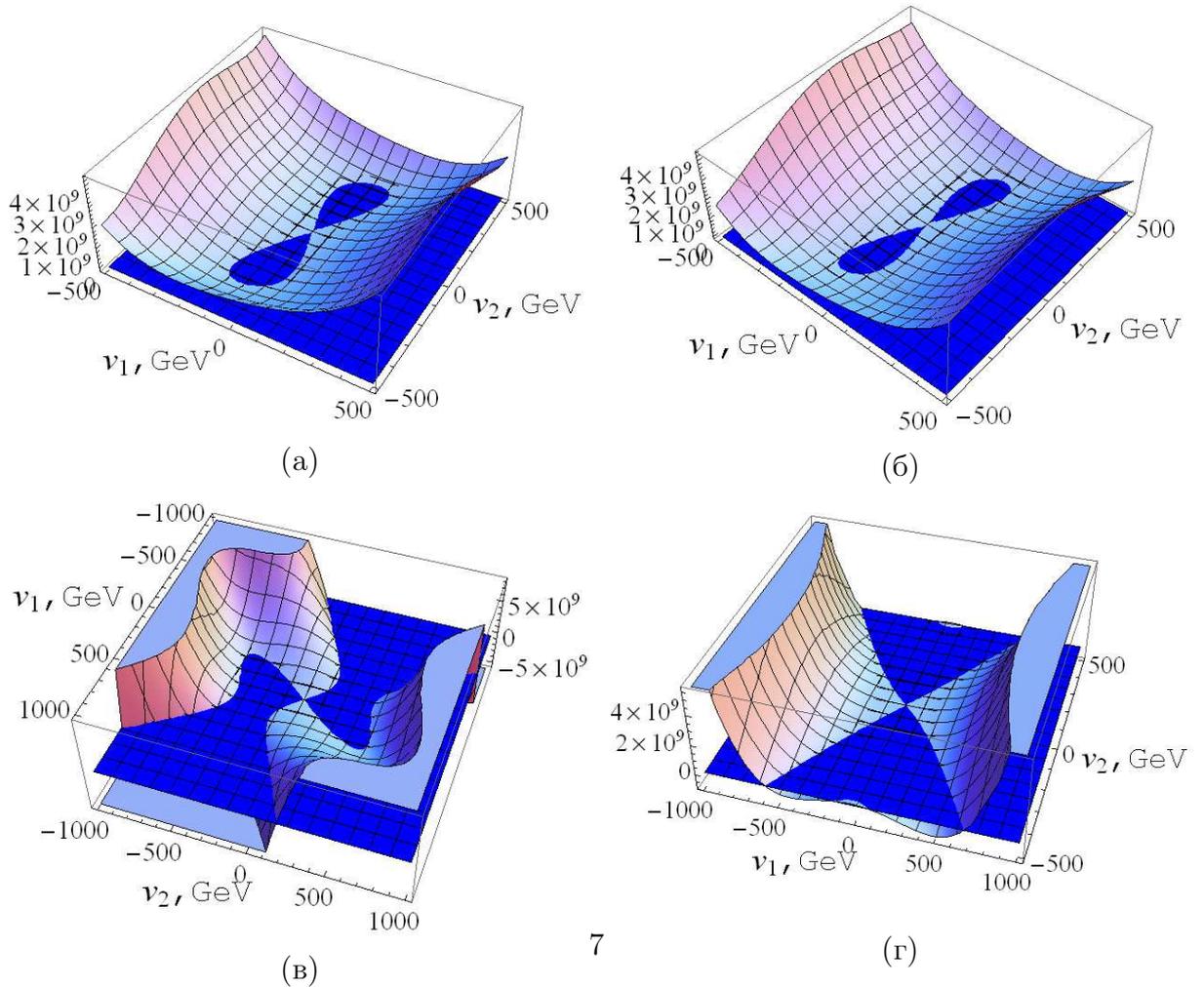


Рис. 2: Экстремальные поверхности эффективного потенциала Хиггса на масштабе m_{top} (левая часть рис.) и на M_{SUSY} (правая часть рис.) при температуре $T = 0$ (верхняя часть рис.) и $T = 350$ ГэВ (нижняя часть рис.).

2 Методы теории катастроф в МССМ

Исследование поведения термодинамической эволюции вакуумного конденсата полей Хиггса в ДДМ затруднено по следующим причинам:

- в разрабатываемом формализме на сегодняшний день не существует приема, позволяющего учитывать температуру явно в хиггсовском потенциале МССМ;
- картина, отражающая вид потенциала Хиггса при заданной температуре, становится двумерной, а следовательно, теоретически возможна зависимость $\beta = \beta(T)$;
- вблизи $\Phi_{1,2} = 0$ эффективный потенциал вообще невозможно вычислить по теории возмущений, т.е. аналитические формы в минимуме отсутствуют.

Простой и эффективный способ решения этих трудностей дает ТК, поскольку ТК изучает плавные и скачкообразные изменения функций, возникающие в виде внезапного ответа на плавное изменение управляющих параметров.

В нашем случае изучаемым объектом является потенциал Хиггса, управляющими параметрами – параметры $\lambda_{1,\dots,7}(T)$ и/или их комбинации. Тогда, действительно, при гладких и непрерывных функциях $\lambda_{1,\dots,7}(T)$ (рис. 1), если существовал электрослабый фазовый переход на ранних этапах Вселенной, должны были осуществляться скачки вакуумного среднего поля Хиггса.

Формализм ТК содержит хорошо определенные формы с известными свойствами в окрестностях изолированных (лемма Морса) и неизолированных критических точек (теорема Тома). Согласно лемме Морса [5] в окрестности изолированных ($\det \partial^2 U(v_1, v_2)/\partial v_i \partial v_j \neq 0$) критических точек (11) существует гладкая нелинейная замена переменных $v_1, v_2 \rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2$ такая, что потенциал Хиггса $U(v_1, v_2)$ может быть представлен в канонической форме $U = \Sigma \bar{\mu}_i^2 \bar{v}_i^2$, где $\bar{\mu}_i^2$ – собственные значения матрицы устойчивости в стационарной точке¹. Согласно теореме Тома, в окрестности неизолированных ($\det \partial^2 U(v_1, v_2)/\partial v_i \partial v_j = 0$ (l условий)) критических точек, потенциал Хиггса может быть представлен в виде суммы формы Морса и некоторой гладкой функции f_{NM} , зависящей от l переменных (неморсовской части): $U = f_{NM} + M_i^{n-l}$, где $\partial^2 f/\partial v_i \partial v_j = 0$, $\partial^2 M/\partial v_i \partial v_j \neq 0$. Таким образом, зная вид критических точек, можно однозначно судить о поведении системы в окрестности этих точек.

Как упоминалось выше, вакуумный конденсат полей Хиггса в пространстве (v_1, v_2) может эволюционировать как по прямой, так и по кривой.

Случай эволюции по прямой ($\text{tg } \beta = v_2/v_1 = \text{const}$) сводится к случаю СМ. Действительно, эффективный потенциал (10) можно выразить лишь через v

$$U = -\mu^2 v^2 + \lambda v^4, \quad (15)$$

где

$$\lambda = \frac{c_\beta^8}{64} (\text{tg}^4 \beta \lambda_2 + 2 \text{tg}^3 \beta \lambda_7 + \text{tg}^2 \beta \lambda_{345} + 2 \text{tg} \beta \lambda_6 + \lambda_1), \quad (16)$$

$$\mu^2 = \frac{c_\beta^4}{8} (\text{tg}^2 \beta \mu_2^2 + 2 \text{tg} \beta \mu_{12}^2 + \mu_1^2), \quad (17)$$

и параметры $\lambda_i = \lambda_i(T)$ ($i = 1, \dots, 7$), $\mu_{1,2,12} = \mu_{1,2,12}(T)$.

¹выражение $\Sigma \bar{\mu}_i^2 \bar{v}_i^2$ называют также морсовским i -седлом M_i^n .

Применим лемму Морса к функции (15). Первая критическая точка $v^{(1)} = 0$ соответствует симметричной фазе, вторая ($v^{(2)} = \pm\sqrt{\alpha}$, где $\alpha = \frac{\mu^2}{2\lambda}$, $\alpha > 0$) соответствует двум минимумам. Матрица устойчивости в стационарных точках $D^2U|_{v^{(1)}} = -2\mu^2$, $D^2U|_{v^{(2)}} = 4\mu^2$, морсовская форма потенциала $U = \lambda(\bar{v}^2 - \alpha^2)$, где $\bar{v} = v^2 - \alpha$. В системе существуют устойчивые минимумы, в окрестности которых не происходит бифуркаций².

Качественно новый **случай эволюции по кривой** в пространстве (v_1, v_2) ($\text{tg } \beta(T) \neq \text{const}$) является наиболее вероятным, поскольку нет никаких оснований считать отношение v_2/v_1 постоянным. Тогда вакуумные конденсаты полей Хиггса $v_1(T), v_2(T)$ независимы, и потенциал (10) имеет критическую точку, определяемую условиями (11). Собственные значения матрицы устойчивости U_{ij} имеют вид

$$\Lambda_{1,2} = -\frac{\bar{\mu}_{1,2}^2}{2}, \quad \bar{\mu}_{1,2}^2 = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2} \mp \frac{D}{2}. \quad (18)$$

Получим канонические формы потенциала Хиггса для изолированных и неизолрированных критических точек в случае переменного значения v_2/v_1 .

3 Каноническая форма Морса

Пусть потенциал Хиггса (10) инвариантен относительно дополнительной $U(1)_{PQ}$ -симметрии (Peccei-Quinn symmetry) [9]

$$U(v_1, v_2) = -\frac{1}{2}\mu_1^2 v_1^2 - \frac{1}{2}\mu_2^2 v_2^2 - \text{Re}\mu_{12}^2 v_1 v_2 + \frac{1}{4}\lambda_1 v_1^4 + \frac{1}{4}\lambda_2 v_2^4 + \frac{1}{4}\lambda_{345} v_1^2 v_2^2. \quad (19)$$

Для получения формы Морса повернем его в пространстве фоновых полей и растянем оси.

3.1 Поворот системы координат

Поворот необходим для удаления слагаемого размерности "два" по полям, т.е. $\mu_{12}^2=0$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{tg}2\theta = \frac{2\mu_{12}^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2}. \quad (20)$$

После поворота ($\text{tg}\beta \rightarrow \text{tg}(\beta - \theta)$) форма потенциала не сохраняется (например, в древесном потенциале МССМ генерируются ненулевые $\bar{\lambda}_6$ и $\bar{\lambda}_7$), однако массы пяти скаляров и их константы взаимодействия инвариантны относительно вращения в пространстве фоновых полей [10] (см. рис. 3).

В повернутой системе координат для фоновых полей потенциал примет вид

$$\bar{U}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = -\frac{\bar{\mu}_1^2}{2}\bar{v}_1^2 - \frac{\bar{\mu}_2^2}{2}\bar{v}_2^2 + \frac{\bar{\lambda}_1}{4}\bar{v}_1^4 + \frac{\bar{\lambda}_2}{4}\bar{v}_2^4 + \frac{\bar{\lambda}_{345}}{4}\bar{v}_1^2\bar{v}_2^2 + \frac{\bar{\lambda}_6}{2}\bar{v}_1^3\bar{v}_2 + \frac{\bar{\lambda}_7}{2}\bar{v}_1\bar{v}_2^3, \quad (21)$$

²Бифуркация – раздвоение, употребляется для обозначений всевозможных качественных перестроек объектов при изменении объектов, от которых они зависят [5].

где переопределенные параметры имеют вид:

$$\bar{\mu}_{1,2}^2 = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2} \mp \frac{D}{2}, \quad D = \sqrt{(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2 + 4\text{Re}\mu_{12}^4} \quad (22)$$

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \frac{1}{D^2} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} (\mu_1^2 - \mu_2^2)^2 + \text{Re}\mu_{12}^4 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{345}) \right) \pm \frac{1}{2D} |\mu_1^2 - \mu_2^2| (-\lambda_1 + \lambda_2), \quad (23)$$

$$\bar{\lambda}_{345} = \frac{1}{D^2} (6(\lambda_1 + \lambda_2)\text{Re}\mu_{12}^4 + \lambda_{345}[(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2 - 2\text{Re}\mu_{12}^4]), \quad (24)$$

$$\bar{\lambda}_{6,7} = -\frac{\text{Re}\mu_{12}^2}{D} \left(-\lambda_1 + \lambda_2 \pm \frac{|\mu_1^2 - \mu_2^2|}{D} (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{345}) \right). \quad (25)$$

В дальнейшем для качественных численных оценок будем использовать константы четверного самодействия МССМ на масштабе M_{SUSY}

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 &= \frac{\bar{g}^2}{32} c_{2\theta}^2 = \frac{\bar{g}^2}{8D^2} (\mu_1^2 - \mu_2^2)^2, \\ \bar{\lambda}_{345} &= \frac{\bar{g}^2}{32} (1 - 3c_{4\theta}) = \frac{\bar{g}^2}{4D^2} [-(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2 + 8\mu_{12}^4], \\ \bar{\lambda}_6 = -\bar{\lambda}_7 &= \frac{\bar{g}^2}{16} s_{4\theta} = -\frac{\bar{g}^2}{2D^2} \mu_{12}^2 |\mu_1^2 - \mu_2^2|. \end{aligned} \quad (26)$$

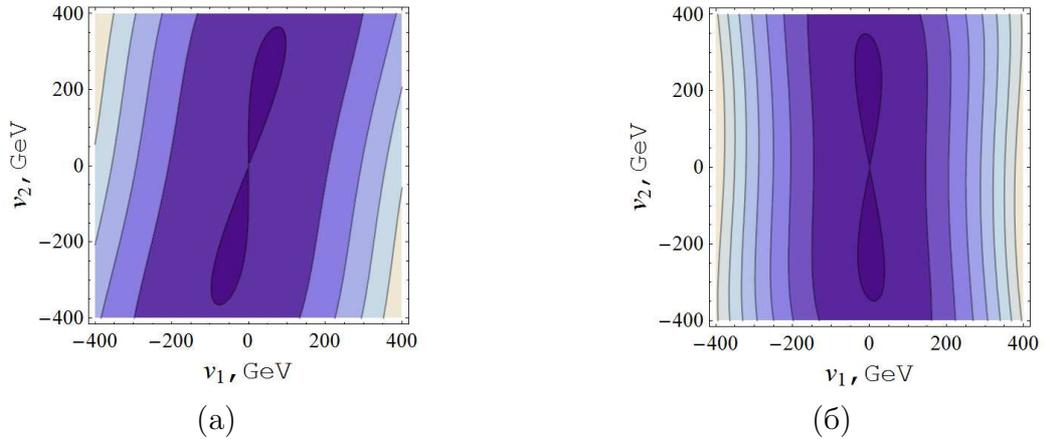


Рис. 3: Контурплоты потенциала Хиггса до и после поворота системы координат на угол θ .

Прямую проверку инвариантности масс бозонов Хиггса m_h, m_H, m_A, m_{H^\pm} относительно поворота (20) в пространстве фоновых полей можно выполнить, используя

преобразование потенциала (4) в массовый базис [6]

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2v^2} \left[\left(\frac{s_\alpha}{c_\beta} \right)^2 m_h^2 + \left(\frac{c_\alpha}{c_\beta} \right)^2 m_H^2 - \frac{s_\beta}{c_\beta^3} \text{Re} \mu_{12}^2 \right] + \frac{1}{4} (\text{Re} \lambda_7 t_\beta^3 - 3 \text{Re} \lambda_6 t_\beta), \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2v^2} \left[\left(\frac{c_\alpha}{s_\beta} \right)^2 m_h^2 + \left(\frac{s_\alpha}{s_\beta} \right)^2 m_H^2 - \frac{c_\beta}{s_\beta^3} \text{Re} \mu_{12}^2 \right] + \frac{1}{4} (\text{Re} \lambda_6 t_\beta^{-3} - 3 \text{Re} \lambda_7 t_\beta^{-1}), \\
\lambda_3 &= \frac{1}{v^2} \left[2m_{H^\pm}^2 - \frac{\text{Re} \mu_{12}^2}{s_\beta c_\beta} + \frac{s_{2\alpha}}{s_{2\beta}} (m_H^2 - m_h^2) \right] - \frac{1}{2} (\text{Re} \lambda_6 t_\beta^{-1} + \text{Re} \lambda_7 t_\beta), \\
\lambda_4 &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{\text{Re} \mu_{12}^2}{s_\beta c_\beta} + m_A^2 - 2m_{H^\pm}^2 \right) - \frac{1}{2} (\text{Re} \lambda_6 t_\beta^{-1} + \frac{1}{2} \text{Re} \lambda_7 t_\beta), \\
\text{Re} \lambda_5 &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{\text{Re} \mu_{12}^2}{s_\beta c_\beta} - m_A^2 \right) - \frac{1}{2} (\text{Re} \lambda_6 t_\beta^{-1} + \text{Re} \lambda_7 t_\beta),
\end{aligned}$$

откуда получаем массы CP -четных скаляров

$$\begin{aligned}
m_h^2 &= c_{\alpha-\beta}^2 m_A^2 + v^2 (2\lambda_1 s_\alpha^2 c_\beta^2 + 2\lambda_2 c_\alpha^2 s_\beta^2 - 2(\lambda_3 + \lambda_4) c_\alpha c_\beta s_\alpha s_\beta \\
&\quad + \text{Re} \lambda_5 (s_\alpha^2 s_\beta^2 + c_\alpha^2 c_\beta^2) - 2c_{\alpha+\beta} (\text{Re} \lambda_6 s_\alpha c_\beta - \text{Re} \lambda_7 c_\alpha s_\beta)), \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_H^2 &= s_{\alpha-\beta}^2 m_A^2 + v^2 (2\lambda_1 c_\alpha^2 c_\beta^2 + 2\lambda_2 s_\alpha^2 s_\beta^2 + 2(\lambda_3 + \lambda_4) c_\alpha c_\beta s_\alpha s_\beta \\
&\quad + \text{Re} \lambda_5 (c_\alpha^2 s_\beta^2 + s_\alpha^2 c_\beta^2) + 2s_{\alpha+\beta} (\text{Re} \lambda_6 c_\alpha c_\beta + \text{Re} \lambda_7 s_\alpha s_\beta)), \quad (28)
\end{aligned}$$

и угол смешивания α

$$\text{tg} 2\alpha = \frac{s_{2\beta} m_A^2 - v^2 ((\lambda_3 + \lambda_4) s_{2\beta} + 2c_\beta^2 \text{Re} \lambda_6 + 2s_\beta^2 \text{Re} \lambda_7)}{c_{2\beta} m_A^2 - v^2 (2\lambda_1 c_\beta^2 - 2\lambda_2 s_\beta^2 - \text{Re} \lambda_5 c_{2\beta} + (\text{Re} \lambda_6 - \text{Re} \lambda_7) s_{2\beta})}. \quad (29)$$

Переопределяя $\text{tg} \beta \rightarrow \text{tg}(\beta - \theta)$ и используя (22)-(25) для $\lambda_i \rightarrow \bar{\lambda}_i$, легко проверить не очевидную из выражений (27)-(29) инвариантность масс бозонов относительно преобразования (20) фоновых полей.

3.2 Нелинейное осесохраняющее преобразование

Для приведения потенциала (21) к канонической форме

$$\bar{U}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = -\frac{\bar{\mu}_1^2}{2} \bar{v}_1^2 - \frac{\bar{\mu}_2^2}{2} \bar{v}_2^2 \quad (30)$$

необходимо осуществить нелинейное осесохраняющее преобразование

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= \bar{v}_1 + (A_{20} \bar{v}_1^2 + A_{11} \bar{v}_1 \bar{v}_2 + A_{02} \bar{v}_2^2) + (A_{30} \bar{v}_1^3 + A_{21} \bar{v}_1^2 \bar{v}_2 + A_{12} \bar{v}_1 \bar{v}_2^2 + A_{03} \bar{v}_2^3) + \dots \\
\bar{v}_2 &= \bar{v}_2 + (B_{20} \bar{v}_1^2 + B_{11} \bar{v}_1 \bar{v}_2 + B_{02} \bar{v}_2^2) + (B_{30} \bar{v}_1^3 + B_{21} \bar{v}_1^2 \bar{v}_2 + B_{12} \bar{v}_1 \bar{v}_2^2 + B_{03} \bar{v}_2^3) + \dots,
\end{aligned} \quad (31)$$

где коэффициенты A_{ij} , B_{ij} нужно определить. Ограничимся членами не выше третьей степени по хиггсовским средним, что обеспечит приемлемую точность.

После подстановки (31) в (30) коэффициенты C_{ij} при членах n -степени по полям $v_1^i v_2^j$ ($n = i + j$, $n = 2, \dots, 6$) необходимо приравнять к коэффициентам, стоящим перед соответствующими полями в (21) (см. табл. 2).

Таблица 2: Система уравнений для определения A_{ij} и B_{ij}

Поля $\bar{v}_1^i \bar{v}_2^j$	Кэффициенты $C_{ij} =$ коэффициенты при $\bar{v}_i \bar{v}_j$ в $\bar{U}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$
\bar{v}_1^3 $\bar{v}_1 \bar{v}_2^2$ $\bar{v}_1^2 \bar{v}_2$ \bar{v}_2^3	$A_{20} \bar{\mu}_1^2 = 0$ $A_{02} \bar{\mu}_1^2 + B_{11} \bar{\mu}_2^2 = 0$ $A_{11} \bar{\mu}_1^2 + B_{20} \bar{\mu}_2^2 = 0$ $B_{02} \bar{\mu}_2^2 = 0$
\bar{v}_1^4 $\bar{v}_1 \bar{v}_2^3$ $\bar{v}_1^2 \bar{v}_2^2$ $\bar{v}_1^3 \bar{v}_2$ \bar{v}_2^4	$-\frac{1}{2} A_{20}^2 \bar{\mu}_1^2 - A_{30} \bar{\mu}_1^2 - \frac{1}{2} B_{20}^2 \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_1}{4}$ $-(A_{03} + A_{02} A_{11}) \bar{\mu}_1^2 - (B_{02} B_{11} + B_{12}) \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_7}{2}$ $-(A_{11}^2 + 2(A_{12} + A_{02} A_{20})) \bar{\mu}_1^2 - (B_{11}^2 + 2(B_{21} + B_{02} B_{20})) \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_{345}}{2}$ $-(A_{21} + A_{11} A_{20}) \bar{\mu}_1^2 - (B_{11} B_{20} + B_{30}) \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_6}{2}$ $-\frac{1}{2} A_{02}^2 \bar{\mu}_1^2 - B_{03} \bar{\mu}_2^2 - \frac{1}{2} B_{02}^2 \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_2}{4}$
\bar{v}_1^5 $\bar{v}_1 \bar{v}_2^4$ $\bar{v}_1^2 \bar{v}_2^3$ $\bar{v}_1^3 \bar{v}_2^2$ $\bar{v}_1^4 \bar{v}_2$ \bar{v}_2^5	$A_{20} A_{30} \bar{\mu}_1^2 + B_{20} B_{30} \bar{\mu}_2^2 = 0$ $(A_{03} A_{11} + A_{02} A_{12}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{03} B_{11} + B_{02} B_{12}) \bar{\mu}_2^2 = 0$ $(A_{11} A_{12} + A_{03} A_{20} + A_{02} A_{21}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{11} B_{12} + B_{03} B_{20} + B_{02} B_{21}) \bar{\mu}_2^2 = 0$ $(A_{12} A_{20} + A_{11} A_{21} + A_{02} A_{30}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{12} B_{20} + B_{11} B_{21} + B_{02} B_{30}) \bar{\mu}_2^2 = 0$ $(A_{20} A_{21} + A_{11} A_{30}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{20} B_{21} + B_{11} B_{30}) \bar{\mu}_2^2 = 0$ $A_{02} A_{03} \bar{\mu}_1^2 + B_{02} B_{03} \bar{\mu}_2^2 = 0$
\bar{v}_1^6 $\bar{v}_1 \bar{v}_2^5$ $\bar{v}_1^2 \bar{v}_2^4$ $\bar{v}_1^3 \bar{v}_2^3$ $\bar{v}_1^4 \bar{v}_2^2$ $\bar{v}_1^5 \bar{v}_2$ \bar{v}_2^6	$A_{30}^2 \bar{\mu}_1^2 + B_{30}^2 \bar{\mu}_2^2$ $A_{03} A_{12} \bar{\mu}_1^2 + B_{03} B_{12} \bar{\mu}_2^2$ $(A_{12}^2 + 2A_{03} A_{21}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{12}^2 + 2B_{03} B_{21}) \bar{\mu}_2^2$ $(A_{12} A_{21} + A_{03} A_{30}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{12} B_{21} + B_{03} B_{30}) \bar{\mu}_2^2$ $(A_{21}^2 + 2A_{12} A_{30}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{21}^2 + 2B_{12} B_{30}) \bar{\mu}_2^2$ $A_{21} A_{30} \bar{\mu}_1^2 + B_{21} B_{30} \bar{\mu}_2^2$ $A_{03}^2 \bar{\mu}_1^2 + B_{03}^2 \bar{\mu}_2^2$

Выражения шестой степени по вакуумным конденсатам, вообще говоря, нельзя приравнять к нулю, следовательно, полученные ниже нелинейные преобразования справедливы с точностью до членов шестой степени. Из таблицы 2 видно, что $A_{20} = B_{02} = 0$, и система уравнений совместна в следующих девяти случаях:

1. $A_{02} = A_{03} = B_{20} = B_{30} = 0$;
2. $B_{20} = B_{30} = A_{02} = 0$;
3. $B_{20} = B_{30} = A_{03} = 0$;
4. $A_{02} = A_{03} = B_{20} = 0$;
5. $A_{02} = A_{03} = B_{30} = 0$;
6. $B_{20} = A_{02} = 0$;
7. $B_{20} = A_{03} = 0$;
8. $B_{30} = A_{02} = 0$;
9. $B_{30} = A_{03} = 0$.

В Приложении изложена техника вычисления всех девяти наборов коэффициентов A_{ij} и B_{ij} .

Казалось бы, такое многообразие случаев лишает данный подход первоначальной привлекательности, поскольку неоднозначность нелинейного преобразования затрудняет физическую интерпретацию. В действительности же подходящих нелинейных преобразований значительно меньше. Во-первых, некоторые нелинейные преобразования приводят к наложению связей на параметры λ и μ , что, вообще говоря, нарушает общность рассматриваемой задачи, и, следовательно, в дальнейшем рассматриваться не будут. Во-вторых, большая часть нелинейных преобразований совпадает

между собой (наборы коэффициентов A_{ij}, B_{ij} одинаковы). В-третьих, некоторые наборы коэффициентов полной информации дать не могут, хотя можно наложить связи на коэффициенты при шестой степени и получить некоторые удовлетворительные наборы (например, сл.1 (3,5,7), 2, 4), однако они принимают весьма громоздкий вид, и рассмотрение подобных случаев в дальнейшем проводить не будем.

В итоге остаются лишь пять наборов коэффициентов A_{ij} и B_{ij} , представленные в таблице 3, где

$$\Lambda_0 = \bar{\lambda}_7 \bar{\mu}_1^2 - \bar{\lambda}_6 \bar{\mu}_2^2, \quad \Lambda_1 = \frac{1}{4\bar{\mu}_1^2} \left(\bar{\lambda}_1 \frac{\bar{\mu}_2^2}{\bar{\mu}_1^2} - \bar{\lambda}_{345} \right), \quad \Lambda_2 = \frac{1}{4\bar{\mu}_2^2} \left(\bar{\lambda}_2 \frac{\bar{\mu}_1^2}{\bar{\mu}_2^2} - \bar{\lambda}_{345} \right).$$

Таблица 3: Изучаемые наборы коэффициентов A_{ij} и B_{ij}

Случай	I_{20}	I_{11}	I_{02}	I_{30}	I_{21}	I_{12}	I_{03}
6.1	0	0	0	$-\frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_{345}}{4\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_7}{2\bar{\mu}_1^2}$
	0	0	0	0	0	0	$-\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$
8.6, 9.4	0	0	0	$-\frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$	0
	9.8.1	0	0	0	Λ_2	$-\frac{\bar{\lambda}_7}{2\bar{\mu}_2^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$
8.8, 9.2	0	0	0	$-\frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$	Λ_1	0
	9.7.1	0	0	0	$-\frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_7}{2\bar{\mu}_2^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$
8.9	0	0	0	$-\frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$	$-\frac{\Lambda_0}{2\bar{\mu}_1^4}$
	0	0	0	0	Λ_2	$-\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$
8.11	0	0	0	$-\frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$	Λ_1	$-\frac{\Lambda_0}{2\bar{\mu}_1^4}$
	0	0	0	0	$-\frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$	$-\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$

Например, выбрав случай 6.1, из таблицы можно записать нелинейное преобразование (31)

$$\begin{aligned} \bar{v}'_1 &= \bar{v}_1 - \frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2} \bar{v}_1^3 - \frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2} \bar{v}_1^2 \bar{v}_2 - \frac{\bar{\lambda}_{345}}{4\bar{\mu}_1^2} \bar{v}_1 \bar{v}_2^2 - \frac{\bar{\lambda}_7}{2\bar{\mu}_1^2} \bar{v}_2^3, \\ \bar{v}'_2 &= \bar{v}_2 - \frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2} \bar{v}_2^3. \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку мы пренебрегаем членами шестой степени, физическая интерпретация результатов одна и та же. Другими словами, нелинейное преобразование приводит потенциал к одной и той же форме (см. рис. 4(б)). Интересно отметить, однако, что некоторые несовпадающие между собой нелинейные преобразования приводят к одному и тому же виду потенциала даже с учетом членов шестой степени (см. рис. 4(в)). Очевидно, что члены шестой степени "портят" вид потенциала Хиггса, однако вблизи окрестности морсовских критических точек вид исходной поверхности удовлетворительно воспроизводится.

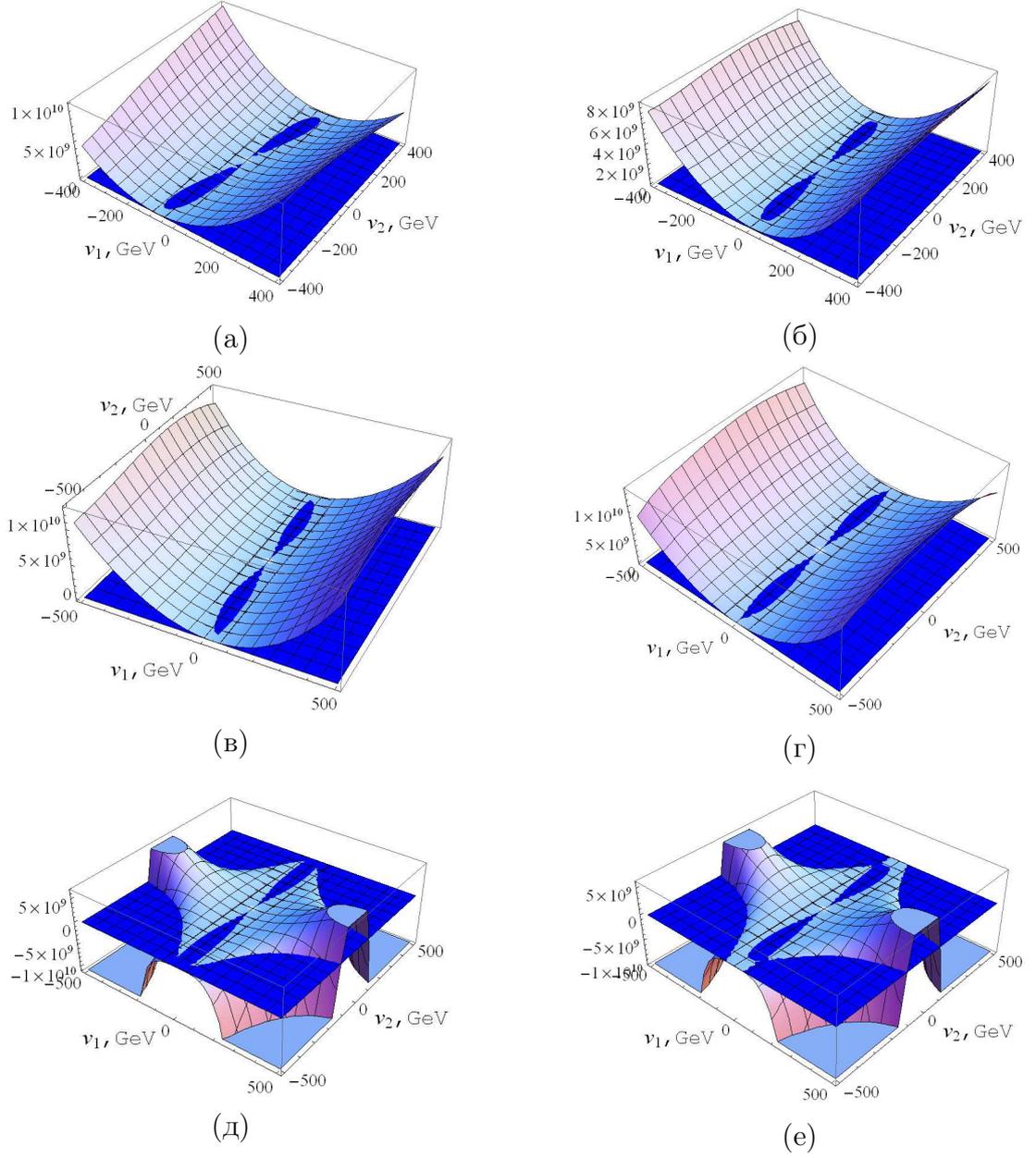


Рис. 4: Вид экстремальных поверхностей (14) на масштабе M_{SUSY} (а) исходного потенциала Хиггса (19), (б) потенциала после поворота (21) (эта же поверхность соответствует потенциалу Хиггса (30) с точностью до $\mathcal{O}(v^6)$), морской формы потенциала Хиггса (30) с учетом слагаемых шестой степени: (в) случаи 6.1, 8.11, (г) случай 8.8 и эквивалентные ему 9.2, 9.7.1, (д) случай 8.6 и эквивалентные ему 9.4, 9.8.1, (е) случай 8.9. Здесь $\tan\beta = 5$, $v = 246$, $m_A = 300$ ГэВ.

4 Приведение эффективного потенциала к канонической форме Тома

В предыдущем разделе было показано, что несмотря на кажущееся многообразие вариантов нелинейных преобразований, последние приводят к одному и тому же виду потенциала Хиггса ($\mathcal{O}(v^6)$), т.е. полные нелинейные преобразования без связей эквивалентны друг другу в пределах заданной точности. В силу этого утверждения получим лишь одно нелинейное преобразование, приводящее к канонической форме Тома, хотя таковых может быть значительно больше.

Наличие фазового перехода I рода неизбежно приводит к тому, что симметричный минимум потенциала Хиггса при высоких температурах $v = 0$ является неизолированной критической точкой, т.е. $\det U_{ij}|_{v=0} = 0$

$$\mu_1^2 \mu_2^2 = (\text{Re} \mu_{12}^2)^2. \quad (33)$$

Тогда собственные значения (18), полученные ранее, принимают вид

$$\Lambda_1 = 0, \quad \Lambda_2 = -\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2}. \quad (34)$$

”Хорошая” переменная \bar{v}'_2 определяет морсовскую часть, а ”плохая” переменная \bar{v}'_1 определяет росток катастрофы. Согласно теореме Тома каноническое разложение потенциала Хиггса в открытой окрестности неизолированной критической точки ($v = 0$; λ) имеет вид

$$U = \Lambda_2(T) \bar{v}'_2{}^2 + \text{Cat}(1, k), \quad (35)$$

где функция-катастрофа $\text{Cat}(1, k)$ зависит от одной переменной и от k управляющих параметров. Здесь полезно заметить, что число управляющих параметров k может и не совпадать с числом n физических параметров λ . Функциями-катастрофами, описывающими фазовый переход первого рода, например, являются функция-катастрофа сборки $\text{Cat}(2, 1) \equiv A_3$ или функция-катастрофа бабочки $\text{Cat}(4, 1) \equiv A_5$ [5].

Для приведения потенциала (19) к канонической форме Тома, содержащей функцию-катастрофу A_3 ,

$$\bar{U}(\bar{v}'_1, \bar{v}'_2) = \Lambda_2 \bar{v}'_2{}^2 + \bar{v}'_1{}^4 + a_1 \bar{v}'_1 + a_2 \bar{v}'_1{}^2 \quad (36)$$

используется техника вычислений, сходная с изложенной в Приложении. Тогда нелинейное преобразование (31) имеет вид

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}_1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_6}{2}\right) \bar{v}_1^2 + \frac{5\bar{\mu}_2^2(2 + \bar{\lambda}_6)^3}{16(2 - 4\bar{\mu}_2^2 + \bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2^2)} \bar{v}_1^2 \bar{v}_2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_6}{2}\right)^2 \bar{v}_1^3, \quad (37)$$

$$\bar{v}'_2 = \bar{v}_2 + \frac{1}{\bar{\mu}_2} \bar{v}_1^2 - \frac{\bar{\lambda}_{345}}{4\bar{\mu}_2^2} \bar{v}_1^2 - \frac{\bar{\lambda}_7}{2\bar{\mu}_2^2} \bar{v}_1 \bar{v}_2^2 - \frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2} \bar{v}_2^3, \quad (38)$$

где управляющие параметры

$$a_1 = \frac{16(2 - 4\bar{\mu}_2^2 + \bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2^2)}{5(2 + \bar{\lambda}_6)^3\bar{\mu}_2^2}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_6}{2}\right). \quad (39)$$

Каноническая форма Морса, содержащая функцию-катастрофу A_5 ,

$$\bar{U}(\bar{v}'_1, \bar{v}'_2) = \Lambda_2 \bar{v}'_2{}^2 + \bar{v}'_1{}^6 + a_1 \bar{v}'_1 + a_2 \bar{v}'_1{}^2 + a_3 \bar{v}'_1{}^3 + a_4 \bar{v}'_1{}^4 \quad (40)$$

может быть найдена с помощью нелинейного преобразования с точностью до членов $O(\bar{v}'_i)$

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}_1 + \frac{13\sqrt{6}}{\sqrt{-\bar{\lambda}_1^5}} \left(\frac{1}{13} \bar{\lambda}_1^2 \bar{v}_1^2 - \frac{8\sqrt{-\bar{\lambda}_1^3}}{13\sqrt{6}} \bar{v}_1^3 + 2\bar{\lambda}_6 \bar{v}_1^2 \bar{v}_2 + \bar{\lambda}_{345} \bar{v}_1^2 \bar{v}_2^2 + 2\bar{\lambda}_7 \bar{v}_1 \bar{v}_2^3 + \bar{\lambda}_2 \bar{v}_2^4 \right) \quad (41)$$

$$\bar{v}'_2 = \bar{v}_2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{-\bar{\lambda}_1 \bar{\mu}_2^2}} (2\bar{\lambda}_6 \bar{v}_1^4 + \bar{\lambda}_{345} \bar{v}_1^3 \bar{v}_2 + 2\bar{\lambda}_7 \bar{v}_1^2 \bar{v}_2^2 + \bar{\lambda}_2 \bar{v}_1 \bar{v}_2^3),$$

где управляющие параметры заданы следующим образом

$$a_1 = \frac{\sqrt{-\bar{\lambda}_1^5}}{52\sqrt{6}}, \quad a_2 = -\frac{\bar{\lambda}_1^2}{52}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{-\bar{\lambda}_1^3}}{13\sqrt{6}}, \quad a_4 = \frac{3\bar{\lambda}_1}{52}. \quad (42)$$

Параметр $\bar{\lambda}_1 < 0$ лишь при высоких температурах на масштабе ниже M_{SUSY} для суперсимметричных параметров $m_Q + m_U < 1$ ТэВ. Численная оценка проводилась в рамках МССМ при учете однопетлевых температурных поправок к константам четверного взаимодействия (26), полученных в [8].

Нарушение симметричного вида потенциала продемонстрировано на рис. 5, на котором изображены экстремальные поверхности потенциалов (36), (40) при характерной температуре электрослабого фазового перехода $T \sim T_c$ в окрестности неизоллированной критической точки $v = 0$.

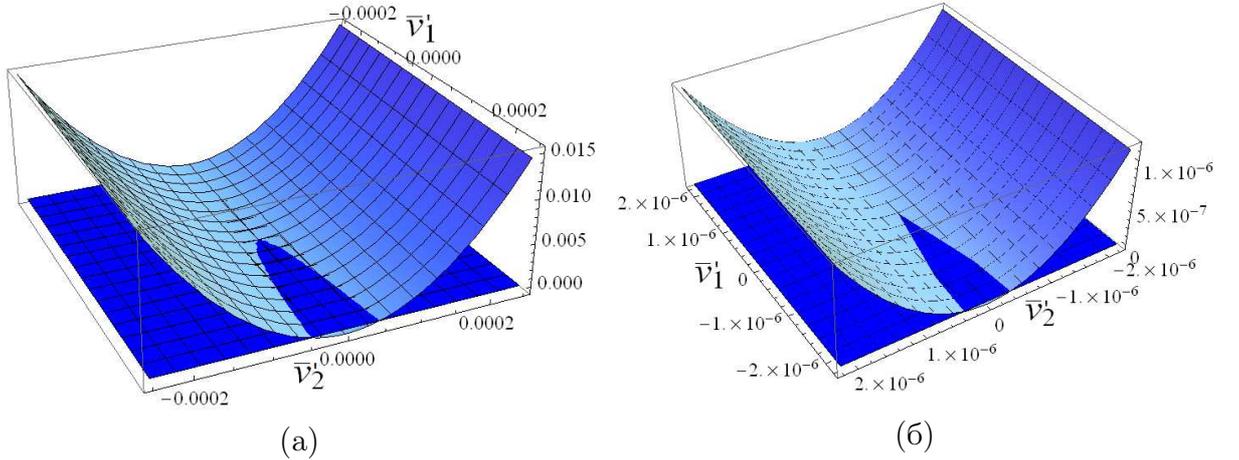


Рис. 5: Вид экстремальных поверхностей потенциалов (36), (40) при характерной температуре электрослабого фазового перехода $T_c = 200$ ГэВ. Здесь $\text{tg } \beta_c = 50$, $\text{tg } \beta = 5$, $v \sim T$ (критерий Шапошникова), $m_Q = 300$ ГэВ, $m_U = 200$ ГэВ, $m_D = 1$ ТэВ.

5 Заключение

Эволюцию минимума эффективного конечнотемпературного потенциала Хиггса 2HDM при изменении управляющих параметров $\lambda_i(T)$ в окрестности критических точек удобно исследовать в рамках теории катастроф. В рамках последней $SU(2) \times U(1)$ -инвариантный потенциал Хиггса можно представить в виде качественно подобных ему форм.

В случае изолированной критической точки минимум потенциала Хиггса по мере остывания Вселенной плавно движется по некоторой кривой ($\text{tg } \beta \neq \text{const}$) до современного значения $v = 246$ ГэВ. Удобно исследовать подобную эволюцию с помощью канонической формы Морса потенциала Хиггса, в терминах которой описание имеет наиболее простой и наглядный вид.

В случае вырожденной критической точки вакуумное состояние системы может "перескакивать" из одного минимума потенциала Хиггса в другой, что с физической точки зрения соответствует фазовому переходу I рода. Описание этого перехода имеет наглядный вид в представлении канонической формы Тома. Если имел место лишь один фазовый переход, описание процесса осуществляется с помощью катастрофы сборки. Если спонтанных скачков вакуумных конденсатов было два – с помощью катастрофы бабочки.

В данной работе изложена техника вычисления по приведению конечнотемпературного эффективного потенциала Хиггса к каноническим формам Морса и Тома, которую следует рассматривать как подготовительный этап к изучению фазовых переходов I рода. В результате были получены нелинейные преобразования, рассмотрены условия их применимости для дальнейшего анализа, сформулирован вывод об эквивалентности полных нелинейных преобразований без связей, конечнотемпературный эффективный потенциал Хиггса приведен к каноническим формам Морса и Тома.

Работа частично поддержана грантом НШ-3042.2014.2.

Приложение

После учета $A_{20} = B_{02} = 0$ (см. табл. 4) выражения C_{50}, C_{05} приводят к существованию девяти возможных случаев, при которых система совместна. Рассмотрим эти случаи отдельно, а результаты представим в таблице 5.

Таблица 4: Система уравнений для определения A_{ij} и B_{ij}

Поля $\bar{v}_1^i \bar{v}_2^j$	Кэффициенты $C_{ij} =$ кэффициенты при $\bar{v}_i \bar{v}_j$ в $\bar{U}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$
$\bar{v}_1 \bar{v}_2^2$	$A_{02} \bar{\mu}_1^2 + B_{11} \bar{\mu}_2^2 = 0$
$\bar{v}_1^2 \bar{v}_2$	$A_{11} \bar{\mu}_1^2 + B_{20} \bar{\mu}_2^2 = 0$
\bar{v}_1^4	$-A_{30} \bar{\mu}_1^2 - \frac{1}{2} B_{20}^2 \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_1}{4}$
$\bar{v}_1 \bar{v}_2^3$	$-(A_{03} + A_{02} A_{11}) \bar{\mu}_1^2 - B_{12} \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_7}{2}$
$\bar{v}_1^2 \bar{v}_2^2$	$-(A_{11}^2 + 2A_{12}) \bar{\mu}_1^2 - (B_{11}^2 + 2B_{21}) \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_{345}}{2}$
$\bar{v}_1^3 \bar{v}_2$	$-A_{21} \bar{\mu}_1^2 - (B_{11} B_{20} + B_{30}) \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_6}{2}$
\bar{v}_2^4	$-\frac{1}{2} A_{02}^2 \bar{\mu}_1^2 - B_{03} \bar{\mu}_2^2 = \frac{\bar{\lambda}_2}{4}$
\bar{v}_1^5	$B_{20} B_{30} \bar{\mu}_2^2 = 0$
$\bar{v}_1 \bar{v}_2^4$	$(A_{03} A_{11} + A_{02} A_{12}) \bar{\mu}_1^2 + B_{03} B_{11} \bar{\mu}_2^2 = 0$
$\bar{v}_1^2 \bar{v}_2^3$	$(A_{11} A_{12} + A_{02} A_{21}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{11} B_{12} + B_{03} B_{20}) \bar{\mu}_2^2 = 0$
$\bar{v}_1^3 \bar{v}_2^2$	$(A_{11} A_{21} + A_{02} A_{30}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{12} B_{20} + B_{11} B_{21}) \bar{\mu}_2^2 = 0$
$\bar{v}_1^4 \bar{v}_2$	$A_{11} A_{30} \bar{\mu}_1^2 + (B_{20} B_{21} + B_{11} B_{30}) \bar{\mu}_2^2 = 0$
\bar{v}_2^5	$A_{02} A_{03} \bar{\mu}_1^2 = 0$
\bar{v}_1^6	$A_{30}^2 \bar{\mu}_1^2 + B_{30}^2 \bar{\mu}_2^2$
$\bar{v}_1 \bar{v}_2^5$	$A_{03} A_{12} \bar{\mu}_1^2 + B_{03} B_{12} \bar{\mu}_2^2$
$\bar{v}_1^2 \bar{v}_2^4$	$(A_{12}^2 + 2A_{03} A_{21}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{12}^2 + 2B_{03} B_{21}) \bar{\mu}_2^2$
$\bar{v}_1^3 \bar{v}_2^3$	$(A_{12} A_{21} + A_{03} A_{30}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{12} B_{21} + B_{03} B_{30}) \bar{\mu}_2^2$
$\bar{v}_1^4 \bar{v}_2^2$	$(A_{21}^2 + 2A_{12} A_{30}) \bar{\mu}_1^2 + (B_{21}^2 + 2B_{12} B_{30}) \bar{\mu}_2^2$
$\bar{v}_1^5 \bar{v}_2$	$A_{21} A_{30} \bar{\mu}_1^2 + B_{21} B_{30} \bar{\mu}_2^2$
\bar{v}_2^6	$A_{03}^2 \bar{\mu}_1^2 + B_{03}^2 \bar{\mu}_2^2$

Случай 1

Условия $A_{02} = A_{03} = B_{20} = B_{30} = 0$ недостаточны для определения нелинейного преобразования, поскольку коэффициенты A_{12}, B_{21} неопределены. Если наложить условие $C_{33} = 0$, то преобразование (31) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{v}'_1 &= \bar{v}_1 - \frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2} \bar{v}_1^3 - \frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2} \bar{v}_1^2 \bar{v}_2 - \frac{\bar{\lambda}_7 \bar{\lambda}_{345}}{4(\bar{\lambda}_7 \bar{\mu}_1^2 - \bar{\lambda}_6 \bar{\mu}_2^2)} \bar{v}_1 \bar{v}_2^2, \\ \bar{v}'_2 &= \bar{v}_2 + \frac{\bar{\lambda}_6 \bar{\lambda}_{345}}{4(\bar{\lambda}_7 \bar{\mu}_1^2 - \bar{\lambda}_6 \bar{\mu}_2^2)} \bar{v}_1^2 \bar{v}_2 - \frac{\bar{\lambda}_7}{2\bar{\mu}_2^2} \bar{v}_1 \bar{v}_2^2 - \frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2} \bar{v}_2^3. \end{aligned} \quad (43)$$

Непосредственной подстановкой (43) в (30) можно убедиться, что с точностью до членов шестой степени по полю выражение совпадает с (21).

Ненулевые члены шестой степени имеют вид

$$C_{60} = -\frac{\bar{\lambda}_1^2}{32\bar{\mu}_1^2}, \quad C_{06} = -\frac{\bar{\lambda}_2^2}{32\bar{\mu}_2^2}, \quad C_{15} = -\frac{\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_7}{8\bar{\mu}_2^2}, \quad C_{51} = -\frac{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_6}{8\bar{\mu}_1^2}, \quad (44)$$

$$C_{24} = \frac{1}{32} \left[\frac{2\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_{345}}{\frac{\bar{\lambda}_7}{\bar{\lambda}_6}\bar{\mu}_1^2 - \bar{\mu}_2^2} - \bar{\lambda}_7 \left(\frac{4}{\bar{\mu}_2^2} + \frac{\bar{\lambda}_{345}^2\bar{\mu}_1^2}{(\bar{\lambda}_7\bar{\mu}_1^2 - \bar{\lambda}_6\bar{\mu}_2^2)^2} \right) \right], \quad (45)$$

$$C_{42} = -\frac{1}{32} \left[4\frac{\bar{\lambda}_6^2}{\bar{\mu}_1^2} + \frac{\bar{\lambda}_{345}\bar{\mu}_2^2(2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_7\bar{\mu}_1^2 + \bar{\lambda}_6(-2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_7 + \bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_{345}))}{(\bar{\lambda}_7\bar{\mu}_1^2 - \bar{\lambda}_6\bar{\mu}_2^2)^2} \right]. \quad (46)$$

Результаты случаев 3, 5, 7 полностью совпадают с данным.

Случай 2

Условия $B_{20} = B_{30} = A_{02} = 0$ недостаточны для определения нелинейного преобразования, поскольку коэффициенты $A_{03}, A_{12}, B_{12}, B_{21}$ неопределены. Если наложить условия $C_{15} = C_{33} = 0$, то преобразование (31) приводит к морсовской форме (30) с точностью до членов шестой степени по полю.

Вычисление коэффициентов A_{ij} и B_{ij} приводит к двум возможным наборам A_{ij}^a , B_{ij}^a и A_{ij}^b , B_{ij}^b

$$A_{12}^{(a,b)} = -\frac{\frac{\bar{\lambda}_{345}}{4} + B_{12}^{(a,b)}\bar{\mu}_2^2}{\bar{\mu}_1^2}, \quad A_{03}^{(a,b)} = -\frac{\frac{\bar{\lambda}_7}{2} + B_{12}^{(a,b)}\bar{\mu}_2^2}{\bar{\mu}_1^2}, \quad (47)$$

$$B_{12}^{(a,b)} = -\frac{\frac{\bar{\lambda}_7}{2}(\frac{\bar{\lambda}_{345}}{4} + B_{21}^{(a,b)}\bar{\mu}_2^2)}{\bar{\mu}_2^2(\frac{\bar{\lambda}_{345}}{4} - \frac{\bar{\lambda}_2}{4}\frac{\bar{\mu}_1^2}{\bar{\mu}_2^2} + B_{21}^{(a,b)}\bar{\mu}_2^2)}, \quad (48)$$

$$B_{21}^{(a,b)} = \frac{\bar{\mu}_1^2(-(\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_6 + \bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_{345}) \pm \sqrt{D_2}) + 2\bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_{345}\bar{\mu}_2^2}{8\bar{\mu}_2^2(\bar{\lambda}_7\bar{\mu}_1^2 - \bar{\lambda}_6\bar{\mu}_2^2)}, \quad (49)$$

$$D_2 = \bar{\lambda}_2^2\bar{\lambda}_6^2 + \bar{\lambda}_7^2\bar{\lambda}_{345}^2 + 2\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_7 \left[-\bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_{345} + \bar{\lambda}_1 \left(-2\bar{\lambda}_7 + 2\bar{\lambda}_6\frac{\bar{\mu}_2^2}{\bar{\mu}_1^2} \right) \right]. \quad (50)$$

Ненулевые члены шестой степени по полю:

$$C_{60} = -\frac{\bar{\lambda}_1^2}{32\bar{\mu}_1^2}, \quad C_{51} = -\frac{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_6}{8\bar{\mu}_1^2}, \quad C_{06}^{(a,b)} = -\frac{1}{2}(A_{03}^{(a,b)})^2\bar{\mu}_1^2 - \frac{\bar{\lambda}_2^2}{32\bar{\mu}_2^2}, \quad (51)$$

$$C_{24}^{(a,b)} = \frac{1}{4} \left(B_{21}^{(a,b)}\bar{\lambda}_2 + 2A_{03}^{(a,b)}\bar{\lambda}_6 - 2((A_{12}^{(a,b)})^2\bar{\mu}_1^2 + (B_{12}^{(a,b)})^2\bar{\mu}_2^2) \right), \quad (52)$$

$$C_{42}^{(a,b)} = \frac{1}{8} \left(2A_{12}^{(a,b)}\bar{\lambda}_1 - \frac{\bar{\lambda}_6^2}{\bar{\mu}_1^2} - 4(B_{21}^{(a,b)})^2\bar{\mu}_2^2 \right). \quad (53)$$

Случай 3

В результате вычислений члены пятой степени по полю $C_{50} = C_{41} = C_{05} = 0$, а C_{14}, C_{23}, C_{32} представляют линейную комбинацию коэффициентов, подлежащих определению. Полагая уравнения пятой степени равными нулю, определяются A_{02}, B_{11}, B_{03} . Однако условия $B_{20} = B_{30} = A_{03} = 0$ недостаточны для определения нелинейного преобразования, поскольку коэффициенты $A_{02}, A_{12}, B_{03}, B_{11}$ неопределены. Если наложить условие $C_{33} = 0$, то преобразование (31) приводит к морсовской форме (30) с точностью до членов шестой степени по полю. Результаты полностью совпадают со случаем 1.

Случай 4

Условия $A_{02} = A_{03} = B_{20} = 0$ недостаточны для определения нелинейного преобразования, поскольку коэффициенты $A_{12}, A_{21}, B_{21}, B_{30}$ неопределены. Для получения коэффициентов $A_{12}, A_{21}, B_{21}, B_{30}$ необходимо наложить связи $C_{33} = C_{51} = 0$. В результате возникают два набора коэффициентов A_{ij}^a, B_{ij}^a и A_{ij}^b, B_{ij}^b

$$A_{12}^{(a,b)} = \frac{-2B_{30}^{(a,b)}\bar{\lambda}_{345}\bar{\mu}_1^2 + \bar{\lambda}_1(\bar{\lambda}_6 + 2B_{30}^{(a,b)}\bar{\mu}_2^2)}{8B_{30}^{(a,b)}\bar{\mu}_1^4}, \quad (54)$$

$$A_{21}^{(a,b)} = -\frac{\bar{\lambda}_6 + 2B_{30}^{(a,b)}\bar{\mu}_2^2}{2\bar{\mu}_1^2}, \quad B_{21}^{(a,b)} = -\frac{\bar{\lambda}_1(\bar{\lambda}_6/2 + B_{30}^{(a,b)}\bar{\mu}_2^2)}{4B_{30}^{(a,b)}\bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_2^2}, \quad (55)$$

$$B_{30}^{(a,b)} = \frac{(\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_7 + \bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_{345})\bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_2^2 - 2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_6\bar{\mu}_2^4 \pm \sqrt{D_4}}{4\bar{\mu}_2^2(\bar{\lambda}_2\bar{\mu}_1^4 - \bar{\lambda}_{345}\bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_2^2 + \bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2^4)}, \quad (56)$$

где

$$D_4 = \bar{\mu}_1^4\bar{\mu}_2^2(4\bar{\mu}_1^2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_7 + \bar{\mu}_2^2[\bar{\lambda}_1^2\bar{\lambda}_7 + \bar{\lambda}_6^2\bar{\lambda}_{345} - 2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_6(2\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_6 + \bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_{345})]). \quad (57)$$

Ненулевые члены шестой степени имеют вид

$$C_{60} = -\frac{\bar{\lambda}_1^2}{32\bar{\mu}_1^2} - \frac{1}{2}(B_{30}^{(a,b)})^2\bar{\mu}_2^2, \quad C_{06} = -\frac{\bar{\lambda}_2^2}{32\bar{\mu}_2^2}, \quad C_{15} = -\frac{\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_7}{8\bar{\mu}_2^2}, \quad C_{24}. \quad (58)$$

Выражение C_{24} , имеющее чрезвычайно громоздкий вид, представляет собой квадратичную форму по $B_{30}^{(a,b)}$.

Случай 5

Уравнения пятой степени $C_{50} = C_{14} = C_{05} = 0$, а C_{23}, C_{32}, C_{41} представляют линейную комбинацию. Совместное решение уравнений C_{21}, C_{32} определяет коэффициенты A_{11}, B_{20} . Условия $A_{02} = A_{03} = B_{30} = 0$ недостаточны для определения нелинейного преобразования, поскольку коэффициенты A_{12}, B_{21} не определены. Дальнейшие рассуждения приведены в случае 1.

Случай 6

Условия $B_{20} = A_{02} = 0$ недостаточны для определения нелинейного преобразования, поскольку коэффициенты $A_{03}, A_{12}, A_{21}, B_{12}, B_{21}, B_{30}$ не определены. Чтобы получить коэффициенты $A_{03}, A_{12}, A_{21}, B_{12}, B_{21}, B_{30}$ необходимо наложить связи $C_{15} = C_{33} = C_{51} = 0$, однако коэффициент $B_{30} \in Im$.

Поскольку наложение связей не приводит к удовлетворительным результатам, предположим, что некоторые из B_{12}, B_{21}, B_{30} равны нулю.

6.1) $B_{12} = B_{21} = B_{30} = 0$: случай имеет нетривиальный набор коэффициентов.

Случаи, представленные ниже, дают неполный набор коэффициентов:

6.2) $B_{12} = B_{21} = 0$: не определены B_{30}, A_{21} ;

6.3) $B_{12} = B_{30} = 0$: не определены B_{21}, A_{12} ;

6.4) $B_{21} = B_{30} = 0$: не определены B_{12}, A_{03} ;

6.5) $B_{12} = 0$: не определены $B_{21}, B_{30}, A_{12}, A_{21}$;

6.6) $B_{21} = 0$: не определены $B_{12}, B_{30}, A_{03}, A_{21}$;

6.7) $B_{30} = 0$: не определены $B_{21}, B_{12}, A_{12}, A_{03}$.

6.1

Предположим, что $B_{12} = B_{21} = B_{30} = 0$, тогда нелинейное преобразование определяет коэффициенты в таблице 5. Решение обратной задачи подтверждает, что с точностью до членов шестой степени по полю нелинейное преобразование переводит (30) в (21).

Ненулевые члены шестой степени:

$$C_{60} = -\frac{\bar{\lambda}_1^2}{32\bar{\mu}_1^2}, \quad C_{06} = -\frac{\bar{\lambda}_7^2}{8\bar{\mu}_1^2} - \frac{\bar{\lambda}_2^2}{32\bar{\mu}_2^2}, \quad C_{15} = -\frac{\bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_{345}}{8\bar{\mu}_1^2}, \quad C_{51} = -\frac{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_6}{8\bar{\mu}_1^2}, \quad (59)$$

$$C_{24} = -\frac{8\bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_7 + \bar{\lambda}_{345}^2}{32\bar{\mu}_1^2}, \quad C_{33} = -\frac{\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_7 + \bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_{345}}{8\bar{\mu}_1^2}, \quad C_{42} = -\frac{2\bar{\lambda}_6^2 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_{345}}{16\bar{\mu}_1^2}. \quad (60)$$

Случай 7

Решение системы, представленной в таблице 4, дает выражение $C_{41} = -B_{11}B_{30}\bar{\mu}_2^2$. Тогда имеем 3 возможных случая:

7.1) $B_{11} = B_{30} = 0$;

7.2) $B_{11} = 0$;

7.3) $B_{30} = 0$,

результаты которых совпадают со случаем 1.

Случай 8

Условия данного случая $A_{20} = B_{02} = B_{30} = A_{02} = 0$ приводят к системе уравнений для выражений пятой степени

$$\begin{cases} A_{03}B_{20} = 0 \\ (\bar{\lambda}_2/4 + A_{12}\bar{\mu}_2^2)B_{20} = 0 \\ (\bar{\lambda}_6/2 + B_{12}\bar{\mu}_1^2)B_{20} = 0 \\ (A_{30} - B_{21})B_{20} = 0 \end{cases},$$

которая совместна при

а) неполных наборах решений:

8.1) $B_{20} = 0$, B_{12}, B_{21} не определены;

8.2) $B_{20} = A_{03} = 0$, A_{12}, B_{21} не определены;

8.3) $B_{20} = 0$, $A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$, A_{03}, B_{12} не определены;

8.4) $B_{20} = 0$, $B_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$, A_{12}, B_{21} не определены;

8.5) $B_{20} = 0$, $A_{30} = B_{21}$, A_{12}, B_{12}, B_{21} не определены;

8.7) $B_{20} = A_{03} = 0$, $B_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$: набор коэффициентов неполон, т.к. A_{12}, B_{21} не определены;

8.10) $B_{20} = 0$, $A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$, $A_{30} = B_{21}$, A_{03}, B_{12} не определены;

8.15) $A_{03} = 0$, $A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$, $B_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$, $A_{30} = B_{21}$, B_{20} не определен;

б) наборах решений со связями:

Тип I $\bar{\lambda}_2\bar{\mu}_1^4 + \bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2^4 = \bar{\lambda}_{345}\bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_2^2$: 8.13, 8.14;

Тип II $\bar{\lambda}_6\bar{\mu}_2^2 = \bar{\lambda}_7\bar{\mu}_1^2$: 8.12;

в) нетривиальных наборах решений без связей: 8.6, 8.8, 8.9, 8.11,

где

8.6) $B_{20} = A_{03} = 0$, $A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}3$;

8.8) $B_{20} = A_{03} = 0$, $A_{30} = B_{21}$, набор коэффициентов совпадает со сл. 9.2, 9.7.1;

8.9) $B_{20} = 0$, $A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$, $B_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$;

8.11) $B_{20} = 0$, $B_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$, $A_{30} = B_{21}$;

8.12) $A_{03} = B_{20} = 0$, $A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$, $B_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}$;

8.13) $A_{03} = B_{20} = 0$, $A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}$, $A_{30} = B_{21}$, набор коэффициентов совпадает со сл. 8.16, 9.1, 9.3.1, 9.3.2, 9.5.1, 9.5.2, 9.7.2, 9.8.2, 9.9.2, 9.9.3;

³Наборы коэффициентов A_{ij}, B_{ij} случаев 9.4, 9.8.1 полностью совпадают с данным.

$$8.14) B_{20} = 0, A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}, B_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}, A_{30} = B_{21};$$

$$8.16) B_{20} = A_{03} = 0, A_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2}, B_{12} = -\frac{\bar{\lambda}_6}{2\bar{\mu}_1^2}, A_{30} = B_{21}.$$

Случай 9

Поскольку начальными условиями данного случая являются $A_{20} = B_{02} = B_{30} = A_{03} = 0$, легко определить A_{02} и A_{11} из условий $C_{12} = C_{21} = 0$

$$A_{02} = -B_{11} \frac{\bar{\mu}_2^2}{\bar{\mu}_1^2}, \quad A_{11} = -B_{20} \frac{\bar{\mu}_2^2}{\bar{\mu}_1^2}. \quad (61)$$

Тогда вид условий

$$C_{14} = (A_{12} - B_{03})B_{11}\bar{\mu}_2^2 = 0, \quad C_{41} = (A_{30} - B_{21})B_{20}\bar{\mu}_2^2 = 0 \quad (62)$$

определяет девять возможных вариантов:

$$9.1) B_{11} = B_{20} = 0, A_{12} = B_{03}, A_{30} = B_{21};$$

$$9.2) B_{11} = B_{20} = 0, A_{30} = B_{21};$$

$$9.3) A_{12} = B_{03}, B_{20} = 0, A_{30} = B_{21};$$

$$9.4) B_{20} = B_{11} = 0, A_{12} = B_{03};$$

$$9.5) A_{30} = B_{21}, B_{11} = 0, A_{12} = B_{03};$$

$$9.6) B_{11} = B_{20} = 0;$$

$$9.7) B_{11} = 0, A_{30} = B_{21};$$

$$9.8) A_{12} = B_{03}, B_{20} = 0;$$

$$9.9) A_{12} = B_{03}, A_{30} = B_{21},$$

которые также имеют вариации

$$9.3) 1) B_{11} = 0, \bar{\lambda}_7\bar{\mu}_1^2 = \bar{\lambda}_6\bar{\mu}_2^2, 2) B_{11} = 0, 3) \bar{\lambda}_7\bar{\mu}_1^2 = \bar{\lambda}_6\bar{\mu}_2^4;$$

$$9.5) 1) A_{21} = B_{12}, B_{20} = 0, 2) B_{20} = 0, 3) A_{21} = B_{12}^5;$$

$$9.7) 1) B_{20} = 0, 2) B_{20} = 0, A_{12} = B_{03}, A_{21} = B_{12}, 3) A_{12} = B_{03}, A_{21} = B_{12};$$

$$9.8) 1) B_{11} = 0, 2) B_{11} = 0, A_{21} = B_{12}, A_{30} = B_{21}, 3) A_{21} = B_{12}, A_{30} = B_{21};$$

$$9.9) 1) A_{21} = B_{12}, 2) B_{11} = B_{20} = 0; 3) A_{21} = B_{12}, B_{11} = B_{20} = 0.$$

Наборы коэффициентов A_{ij}, B_{ij} , в большинстве случаев совпадающих между собой, могут иметь одну связь, две связи, не иметь связей или быть неопределенными (см. табл. 5).

⁴Набор коэффициентов совпадает со сл. 9.8.3.

⁵Набор коэффициентов совпадает со сл. 9.7.3.

Таблица 5: Коэффициенты A_{ij} и B_{ij}

Случай	I_{20}	I_{11}	I_{02}	I_{30}	I_{21}	I_{12}	I_{03}	Связь
1, 3	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_7\lambda_{345}}{4\Lambda_0}$	0	$C_{33} = 0$
5, 7	0	0	0	0	$\frac{\lambda_6\lambda_{345}}{4\Lambda_0}$	$-\frac{\lambda_7}{2\mu_2^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	
2	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$A_{12}^{(a,b)}$	$A_{03}^{(a,b)}$	$C_{15} = 0$
	0	0	0	0	$B_{21}^{(a)}$	$B_{12}^{(a,b)}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	$C_{33} = 0$
4	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$A_{21}^{(a,b)}$	$A_{12}^{(a,b)}$	0	$C_{33} = 0$
	0	0	0	$B_{30}^{(a,b)}$	$B_{21}^{(a,b)}$	$-\frac{\lambda_7}{2\mu_2^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	$C_{51} = 0$
6.1	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_{345}}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_7}{2\mu_1^2}$	нет
	0	0	0	0	0	0	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	
8.6, 9.4	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	0	нет
	9.8.1	0	0	0	Λ_2	$-\frac{\lambda_7}{2\mu_2^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	
8.8, 9.2	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	Λ_1	0	нет
	9.7.1	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_7}{2\mu_2^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	
8.9	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	$-\frac{\Lambda_0}{2\mu_1^2}$	нет
	0	0	0	0	Λ_2	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	
8.11	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	Λ_1	$-\frac{\Lambda_0}{2\mu_1^2}$	нет
	0	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	
8.13, 9.1	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	0	I тип
	...	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_7}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	
9.3.3	0	0	$-B_{11}\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	\tilde{B}_{11}	0	I тип
9.8.3	0	\forall	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	\tilde{B}_{11}	II тип
9.5.3	0	$-B_{20}\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}$	0	\tilde{B}_{20}	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	0	I тип
9.7.3	\forall	0	0	0	\tilde{B}_{20}	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	
9.6	0	0	0	$-\frac{\lambda_1}{4\mu_1^2}$	$-\frac{\lambda_6}{2\mu_1^2}$?	0	$A_{12}\mu_1^2 + B_{21}\mu_2^2$
	0	0	0	0	\tilde{A}_{12}	$-\frac{\lambda_7}{2\mu_2^2}$	$-\frac{\lambda_2}{4\mu_2^2}$	$= -\frac{\lambda_{345}}{4}$
9.9.1	0	$-B_{20}\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}$	$-B_{11}\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}$	\tilde{B}_{20}	B_{12}	\tilde{B}_{11}	0	I тип
	?	?	0	0	\tilde{B}_{20}	?	A_{12}	II тип

В таблице 5 представлены наборы коэффициентов A_{ij}, B_{ij} , где в первой строке $I_{ij} = A_{ij}$, во второй строке $I_{ij} = B_{ij}$ и приняты обозначения

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \bar{\lambda}_7 \bar{\mu}_1^2 - \bar{\lambda}_6 \bar{\mu}_2^2, & \Lambda_1 &= \frac{1}{4\bar{\mu}_1^2} \left(\bar{\lambda}_1 \frac{\bar{\mu}_2^2}{\bar{\mu}_1} - \bar{\lambda}_{345} \right), & \Lambda_2 &= \frac{1}{4\bar{\mu}_2^2} \left(\bar{\lambda}_2 \frac{\bar{\mu}_1^2}{\bar{\mu}_2} - \bar{\lambda}_{345} \right), \\ \tilde{A}_{12} &= -\frac{1}{\bar{\mu}_2^2} \left(\frac{\bar{\lambda}_{345}}{4} + A_{12} \bar{\mu}_1^2 \right), & \tilde{B}_{11} &= -\frac{\bar{\lambda}_2}{4\bar{\mu}_2^2} - \frac{B_{11}^2 \bar{\mu}_2^2}{2 \bar{\mu}_1^2}, & \tilde{B}_{20} &= -\frac{\bar{\lambda}_1}{4\bar{\mu}_1^2} - \frac{B_{20}^2 \bar{\mu}_2^2}{2 \bar{\mu}_1^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

В качестве примера неполных наборов (возникающих также в случаях 6.1 – 6.7, 8.1 – 8.7, 8.10, 8.15) приведены наборы для случаев 9.6, 9.9.1⁶.

⁶Заметим, что неполных наборов может быть и больше, если не накладывать связи на выражения шестой степени.

Список литературы

- [1] M. Carena, G. Nardini, M. Quiros, C.E.M. Wagner, *The baryogenesis window in the MSSM*, Nucl.Phys. **B812** (2009) 243 (arXiv:0809.3760 [hep-ph])
L. Fromme, S. Huber, M. Seniuch, *Baryogenesis in the Two-Higgs-Doublet model*, JHEP 0611, 038 (2006) (hep-ph/0605242)
C. Balazs, M. Carena, A. Menon, D.Morrissey, C.E.M. Wagner, *The supersymmetric origin of matter*, Phys.Rev. **D71** (2005) 075002 (hep-ph/0412264)
Y. Okada et al., *Electroweak baryogenesis and quantum corrections to the Higgs potential*, in: Proc. of CERN Workshop on CP studies and nonstandard Higgs physics, ed. by S.Kraml, G.Azuelos, D.Dominici, J.Ellis, G.Grenier, H.Haber, J.S.Lee, D.Miller, A.Pilaftsis, W.Porod, CERN Yellow Report 2006–009, 2006 (hep-ph/0608079)
S. Kanemura, Y. Okada, E. Senaha *Electroweak baryogenesis and quantum corrections to the triple Higgs boson coupling* (arXiv:0411354v1)
M. Losada, *Mixing effects in the finite temperature effective potential of the MSSM with a light stop*, Nucl. Phys. **B569** (2000) 125 (hep-ph/9905441)
J. Cline, K. Kainulainen, *Supersymmetric electroweak phase transition: dimensional reduction vs effective potential*, Nucl.Phys. **B510** (1998) 88 (hep-ph/9705201)
J.M. Cline *Baryogenesis* (arXiv:0609.145v3)
G.R. Farrar, M. Losada, *SUSY and the electroweak phase transition*, Phys.Lett. **B406** (1997) 60 (hep-ph/9612346)
P. Arnold, O. Espinosa, *The effective potential and first-order phase transition: beyond leading order*, Phys.Rev. **D47** (1993) 3546 (Erratum-ibid. **D50** (1994) 6662 (hep-ph/9212235))
A. Brignole, J.R. Espinosa, M. Quiros, F. Zwirner, *Aspects of the electroweak phase transition in the MSSM*, Phys. Lett. **B324** (1994) 181 (hep-ph/9312296) G.F. Giudice, *The electroweak phase transition in supersymmetry*, Phys.Rev. **D45** (1992) 3177
N. Turok, J. Zadrozny, *Phase transitions in the Two-Doublet model*, Nucl. Phys. **B369** (1992) 729
A.I. Bochkarev, S.V. Kuzmin, M.E. Shaposhnikov, *Electroweak baryogenesis and the Higgs boson mass problem*, Phys.Lett. **B244** (1990) 275
J.R. Espinosa, M. Quiros, F. Zwirner *On the phase transition in the scalar theory // Phys.Rev. **B291** (1992). P.115-124*
- [2] A.D.Linde, *Phase transitions in gauge theories and cosmology*, Rep. Prog. Phys., 42, 389 (1979)
S.Weinberg, *Gauge and global symmetries at high temperature*, Phys. Rev. **D9**, 3357 (1974)
- [3] В.А.Рубаков, М.Е.Шапошников, *Электрослабое несохранение барионного заряда в ранней Вселенной и в столкновениях при высокой энергии*, УФН, 166, 493 (1996)
Горбунов Д.С., Рубаков В.А., *Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва*. – М.: Издательство ЛКИ, 2008.

- [4] Сахаров А.Д. *Письма в ЖЭТФ*, 5, 32 (1967)
- [5] V.I.Arnol'd, *Critical points of smooth functions and their normal forms*, Russian Math. Surveys, 30, 1, 1975
 В.И. Арнольд *Теория катастроф*. - 3-е изд., доп. - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1990
 R.Thom, *Structural stability and morphogenesis*, Reading, Benjamin, 1975
 М. Morse, *The critical points of a function of n variables*, Trans. Am. Math. Soc., **33** (1931) 72
 R.Gilmore, *Catastrophe theory for scientists and engineers*, Dover Publications, Inc., New York, 1993
 Гилмор Р. *Прикладная теория катастроф: В 2-х книгах*. Кн. 1. Пер. с англ. - М.:Мир, 1984
 Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и её приложения*. Пер. с англ. А.В. Чернавского - М.:Мир, 1980
- [6] M.N. Dubinin, A.V. Semenov, *Triple and quartic interactions of Higgs bosons in the Two-Doublet model with CP violation*, Eur. J. Phys. **C28**, 223 (2003) (hep-ph/0206205)
 F. Boudjema, A. Semenov, *Measurements of the supersymmetric Higgs self-couplings and the reconstruction of the Higgs potential*, Phys. Rev. **D66**, 095007 (2002) (hep-ph/0201219)
 Е. Akhmetzyanova, M. Dolgoplov, M. Dubinin *Higgs bosons in the two-Higgs-doublet model with CP violation*, Phys.Rev. D71 075008 (2005) (hep-ph/0405264)
 Э.Н. Ахметзянова, М.В. Долгополов, М.Н. Дубинин *Нарушение CP-инвариантности в двухдублетном хиггсовском секторе МССМ // ЭЧАЯ*, 2006. Т.37, 5. С. 1285-1382; англ. пер.: E.N. Akhmetzyanova, M.V. Dolgoplov, M.N. Dubinin *Violation of CP invariance in the two doublet higgs sector of the MSSM // Phys. Part. Nuclei*, 2006. Vol. 37, no. 5. Pp. 1285-1382
- [7] H.Haber, R.Hempfling, *The renormalization group improved Higgs sector of the minimal supersymmetric model*, Phys.Rev. **D48**, 4280 (1993)
- [8] M. Dolgoplov, M. Dubinin, E. Rykova, *Threshold corrections to the MSSM finite-temperature Higgs potential*, J.Mod.Phys. 2, 301 (2011) (arXiv:0901.0524[hep-ph])
 А.О. Borisov, M.V. Dolgoplov, M.N. Dubinin, E.N. Rykova, *Analytic expressions for threshold corrections to the finite-temperature Higgs potential in the MSSM*, Phys.Atom.Nucl. **72**, 167 (2009) (Yad.Fiz. **72**, 175 (2009))
- [9] R.Peccei, H.Quinn, *CP conservation in the presence of pseudoparticles*, Phys.Rev.Lett., **38**, 1440 (1977)
- [10] S. Davidson, H. Haber, *Basis-independent methods for the two-Higgs-doublet model*, Phys.Rev. **D72**, 035004 (2005) (hep-ph/0504050)

Михаил Николаевич Дубинин

Елена Юрьевна Петрова

**КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ДЛЯ
ПОТЕНЦИАЛА ХИГГСА ДВУХДУБЛЕТНОЙ МОДЕЛИ**

Препринт НИИЯФ МГУ № 2014 – 3/887

Работа поступила в ОНТИ 31.10.2014