С.Ю. Вернов, Е.И. Тимошкова

НОВЫЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА

Препринт НИИЯФ МГУ 2003–14/727

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО–ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

С.Ю. Вернов, Е.И. Тимошкова

НОВЫЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА

Препринт НИИЯФ МГУ 2003–14/727

Vernov S.Yu.*, Timoshkova E.I.**

*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics MSU
**Central Astronomical Observatory at Pulkovo

e-mails: svernov@theory.sinp.msu.ru, elenatim@gao.spb.ru

NEW TWO–PARAMETER SOLUTIONS FOR THE GENERALIZED HÉNON–HEILES SYSTEM

Preprint SINP MSU 2003–14/727

Abstract

The generalized Hénon–Heiles system is considered. In two nonintegrable cases new two-parameter solutions have been obtained in terms of elliptic functions. These solutions generalize the known one-parameter solutions. The singularity analysis shows that it is possible that the obtained solutions are parts of three-parameter single-valued solutions.

Keywords: nonintegrable systems, the Painlevé analysis, the Laurent series, elliptic functions, galactic potential, special solutions.

Вернов С.Ю.*, Тимошкова Е.И.**

*Научно–Исследовательский Институт Ядерной Физики МГУ
**Главная (Пулковская) Астрономическая Обсерватория РАН

НОВЫЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА

Препринт НИИЯФ МГУ 2003–14/727

Аннотация

Рассматривается обобщённая система Хенона–Хейлеса. В двух неинтегрируемых случаях найдены новые двухпараметрические решения, выражающиеся в терминах эллиптических функций. Данные решения обобщают известные однопараметрические решения. Анализ сингулярностей демонстрирует возможность того, что найденные решения являются частями однозначных трёхпараметрических решений.

© С.Ю. Вернов, 2003
© Е.И. Тимошкова, 2003
© НИИЯФ МГУ, 2003

1 ГАМИЛЬТОНИАН ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА

В шестидесятые годы активно изучались модели движения звёзд в цилиндрически симметричном и не зависящем от времени потенциале [1–3]. Трёхмерная задача, благодаря симметрии потенциала, сводится к двумерной, однако, нахождение второго интеграла полученной системы в аналитическом виде, например, в виде полинома по фазовым переменным, оказывается неразрешимой задачей даже для сравнительно простых полиномиальных потенциалов. В 1964 г. Хенон и Хейлес для ответа на вопрос о существовании неизвестного интеграла исследовали поведение траекторий с помощью численного интегрирования уравнений движения [3]. Подчёркивая, что при выборе потенциала не исходят из экспериментальных данных, они предложили гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\left(x_t^2 + y_t^2 + x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3}\, y^3, \tag{1}$$

поскольку он, с одной стороны, достаточно прост, что позволяет легко вычислять траектории, а, с другой стороны, достаточно сложен, чтобы полученные траектории оказались далеко не тривиальными. В самом деле, при малых энергиях система Хенона–Хейлеса выглядит интегрируемой в том смысле, что, независимо от начальных условий, траектории, полученные с помощью численного интегрирования, лежат на двумерных поверхностях, т.е. так, как если бы существовал второй независимый интеграл. В то же время, с увеличением энергии многие из этих поверхностей распадаются, что указывает на отсутствие второго интеграла.

Обобщённая система Хенона–Хейлеса описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(x_t^2 + y_t^2 + \lambda x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{C}{3}\, y^3 \tag{1'}$$

и соответствующей системой уравнений движения

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{tt} & = & -\,\lambda x - 2xy, \\ y_{tt} & = & -\,y - x^2 + Cy^2, \end{array} \right. \tag{2}$$

где $x_{tt} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$ и $y_{tt} \equiv \frac{d^2y}{dt^2}$, а λ и C — численные параметры.

Анализ Пенлеве [4–6] позволил отыскать интегрируемые случаи системы (2) [7, гл. 8]:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & C=-1, & \lambda=1, \\ \text{(ii)} & C=-6, & \lambda\ \text{— \textbf{произвольное число}}, \\ \text{(iii)} & C=-16, & \lambda=\frac{1}{16}. \end{array}$$

Система Хенона–Хейлеса является моделью, не только активно изучаемой различными математическими методами[1], но и широко используемой в физике, в частности, в гравитации [9, 10].

2 НЕИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ

Задача нахождения частных решений системы (2), представимых в виде общих решений полиномиальных уравнений первого порядка, активно исследуется [11-16]. Данная статья посвящена построению двухпараметрических траекторий, представимых в аналитическом замкнутом виде, и является непосредственным продолжением работ [15, 16].

Система Хенона–Хейлеса, как система двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, равносильна уравнению четвёртого порядка[2]:

$$\begin{aligned} y_{tttt} &= (2C-8)y_{tt}y-(4\lambda+1)y_{tt}+2(C+1)y_t^2+ \\ &+ \frac{20C}{3}y^3+(4C\lambda-6)y^2-4\lambda y-4H, \end{aligned} \tag{3}$$

где H — энергия системы.

Частные решения данного уравнения можно найти, предположив, что y — решение более простого ОДУ. Например, хорошо известны двухпараметрические решения в виде эллиптических функций Вейерштрасса [17], удовлетворяющих уравнению:

$$y_t^2=\mathcal{A}y^3+\mathcal{B}y^2+\mathcal{C}y+\mathcal{D}, \tag{4}$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — некоторые константы[3].

[1]История изучения обобщённой системы Хенона–Хейлеса описана в [8].

[2]При известной $y(t)$ функция $x^2(t)$ находится как решение линейного уравнения. Система (2) инвариантна относительно замены x на $-x$, каждому решению уравнения (3) соответствуют два решения системы Хенона–Хейлеса.

[3]Формулы, выражающие данные константы через C, λ и H, приведены в [18].

Уравнение (4) было обобщено в работе [15]:

$$y_t^2 = \tilde{\mathcal{A}} y^3 + \tilde{\mathcal{B}} y^{5/2} + \tilde{\mathcal{C}} y^2 + \tilde{\mathcal{D}} y^{3/2} + \tilde{\mathcal{E}} y + \tilde{\mathcal{G}}, \qquad (5)$$

при этом были найдены новые однопараметрические решения системы Хенона–Хейлеса в двух неинтегрируемых случаях: $C = -4/3$ и $C = -16/5$ (λ — произвольное число).

Каждой паре значений C и λ соответствуют четыре уравнения с $\tilde{\mathcal{B}} \neq 0$ или $\tilde{\mathcal{D}} \neq 0$. Примечательно, что подобные уравнения получаются при $\tilde{\mathcal{G}} = 0$, поэтому замена $y = \varrho^2$ приводит к

$$\varrho_t^2 = \frac{1}{4}(\tilde{\mathcal{A}} \varrho^4 + \tilde{\mathcal{B}} \varrho^3 + \tilde{\mathcal{C}} \varrho^2 + \tilde{\mathcal{D}} \varrho + \tilde{\mathcal{E}}). \qquad (6)$$

Общее решение уравнения (6) зависит от одного произвольного параметра и может быть выражено либо в элементарных, либо в эллиптических функциях. В [16] с помощью замены $y \longrightarrow y - P_0$ в уравнение (5) был введён новый произвольный параметр P_0. Для нескольких значений λ были построены двухпараметрические решения, при этом условие $\tilde{\mathcal{G}} = 0$ по-прежнему оказалось необходимым для получения решений с $\tilde{\mathcal{B}} \neq 0$ или $\tilde{\mathcal{D}} \neq 0$. Анализ Пенлеве позволил установить, что при данных значениях C и произвольном λ существуют локальные решения в виде трёхпараметрических рядов Лорана [19]. В данной статье для произвольного λ находятся двухпараметрические решения, обобщающие найденные в [15], и проводится анализ полученных решений.

3 НОВЫЕ РЕШЕНИЯ

Предположим, что решения уравнения (3) в окрестности особой точки t_0 стремятся к бесконечности как $y = c_\beta (t - t_0)^\beta$, где β и c_β — комплексные константы. Разумеется, действительная часть β должна быть меньше нуля. Как легко показать [7], из данного предположения следует, что $\beta = -2$. Ряды Лорана решений уравнения (6) начинаются с члена пропорционального $(t - t_0)^{-1}$, поэтому будем искать решения уравнения (3) в виде квадратичного полинома

$$y = P_2 \varrho^2 + P_1 \varrho + P_0,$$

где P_2, P_1 и P_0 — произвольные константы, а ϱ — решение уравнения (6) с произвольными коэффициентами $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{D}}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$. Так как функция

$$\tilde{\varrho} = \frac{\varrho - \frac{P_1}{2}}{\sqrt{P_2}}$$

тоже является решением уравнения (6), то без ограничения общности можно положить $P_2 = 1$ и $P_1 = 0$. Подставляя $y = \varrho^2 + P_0$ в (3), получаем

$$\begin{aligned} \varrho_{tttt}\varrho \; = \; & -4\varrho_{ttt}\varrho_t - 3\varrho_{tt}^2 + 2(C-4)\varrho_{tt}\varrho^3 + (2P_0(C-4) - 4\lambda - 1)\varrho_{tt}\varrho + \\ + \; & 2(3C-2)\varrho_t^2\varrho^2 + (2CP_0 - 4\lambda - 8P_0 - 1)\varrho_t^2 + \frac{10}{3}C\varrho^6 + \\ + \; & (2C\lambda + 10CP_0 - 3)\varrho^4 + 2(2C\lambda P_0 + 5CP_0^2 - \lambda - 3P_0)\varrho^2 + \\ + \; & \frac{10}{3}CP_0^3 + 2C\lambda P_0^2 - 3P_0^2 - 2\lambda P_0 - 2H. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как ϱ — решение уравнения (6), то уравнение (7) равносильно системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} (3\tilde{\mathcal{A}} + 4)\,(-3\tilde{\mathcal{A}} + 2C) = 0, \\ \tilde{\mathcal{B}}(-21\tilde{\mathcal{A}} + 9C - 16) = 0, \\ 96\tilde{\mathcal{A}}CP_0 - 240\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{C}} - 192\tilde{\mathcal{A}}\lambda - 384\tilde{\mathcal{A}}P_0 - 48\tilde{\mathcal{A}} - \\ \; - 105\tilde{\mathcal{B}}^2 + 128\tilde{\mathcal{C}}C - 192\tilde{\mathcal{C}} + 128C\lambda + 640CP_0 - 192 = 0, \\ 40\tilde{\mathcal{B}}CP_0 - 90\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{D}} - 65\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{C}} - 80\tilde{\mathcal{B}}\lambda - \\ \; - 160\tilde{\mathcal{B}}P_0 - 20\tilde{\mathcal{B}} + 56C\tilde{\mathcal{D}} - 64\tilde{\mathcal{D}} = 0, \\ 16\tilde{\mathcal{C}}CP_0 - 36\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{E}} - 21\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{D}} - 8\tilde{\mathcal{C}}^2 - 32\tilde{\mathcal{C}}\lambda - 64\tilde{\mathcal{C}}P_0 - 8\tilde{\mathcal{C}} + \\ \; + 24C\tilde{\mathcal{E}} + 64C\lambda P_0 + 160CP_0^2 - 16\tilde{\mathcal{E}} - 32\lambda - 96P_0 = 0, \\ 10\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{E}} + (5\tilde{\mathcal{C}} + 8CP_0 - 16\lambda - 32P_0 - 4)\tilde{\mathcal{D}} = 0, \\ 384H = -48\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{E}} + 96C\tilde{\mathcal{E}}P_0 + 384C\lambda P_0^2 + 640CP_0^3 - 9\tilde{\mathcal{D}}^2 - \\ \; - 192\tilde{\mathcal{E}}\lambda - 384\tilde{\mathcal{E}}P_0 - 48\tilde{\mathcal{E}} - 384\lambda P_0 - 576P_0^2. \end{array} \right. \tag{8}$$

С помощью системы компьютерной алгебры REDUCE [21, 20] данная система легко решается. Будем рассматривать только решения, для которых $\tilde{\mathcal{B}} \neq 0$ или $\tilde{\mathcal{D}} \neq 0$. В противном случае получаются решения уравнения (4), причём использованное нами условие $\tilde{\mathcal{G}} = 0$ оказывается ничем не оправданным ограничением.

Предположим, что $\tilde{\mathcal{B}} \neq 0$, тогда из первых двух уравнений легко получить возможные значения параметра C и соответствующие значения $\tilde{\mathcal{A}}$:

$$C = -\frac{4}{3}, \quad \tilde{\mathcal{A}} = -\frac{4}{3} \qquad \text{и} \qquad C = -\frac{16}{5}, \quad \tilde{\mathcal{A}} = -\frac{32}{15}.$$

Новые решения получаются в обоих вышеуказанных случаях[4] (λ — произвольное число), при этом параметр P_0 определяет энергию системы.

Полученные выражения оказываются достаточно громоздкими, поэтому анализ результатов мы проведём в двух частных случаях: $C = -16/5$, $\lambda = 1/9$ и $C = -4/3$, $\lambda = 16/9$. Общие формулы приведены в Приложении.

Решая (8) при $C = -16/5$ и $\lambda = 1/9$, получаем следующие решения[5]:

1. $\tilde{\mathcal{A}} = -\dfrac{32}{15}$, $\quad\tilde{\mathcal{D}} = 0$,

$\tilde{\mathcal{B}} = 0$, $\quad\tilde{\mathcal{E}} = -\dfrac{32}{5}P_0^2 - 2P_0$,

$\tilde{\mathcal{C}} = -\dfrac{32}{5}P_0 - 1$, $\quad H = \dfrac{16}{15}P_0^3 + \dfrac{1}{2}P_0^2$

2. $\tilde{\mathcal{A}} = -\dfrac{4}{3}$, $\quad\tilde{\mathcal{D}} = 0$,

$\tilde{\mathcal{B}} = 0$, $\quad\tilde{\mathcal{E}} = -4P_0^2 - \dfrac{34}{33}P_0 + \dfrac{20}{3267}$,

$\tilde{\mathcal{C}} = -4P_0 - \dfrac{17}{33}$, $\quad H = -\dfrac{2}{15}P_0^3 - \dfrac{17}{330}P_0^2 + \dfrac{2}{3267}P_0 - \dfrac{230}{323433}$,

3. $\tilde{\mathcal{A}} = -\dfrac{32}{15}$, $\quad\tilde{\mathcal{D}} = \dfrac{4i\sqrt{15}}{9}P_0$,

$\tilde{\mathcal{B}} = \dfrac{8i\sqrt{15}}{45}$, $\quad\tilde{\mathcal{E}} = -\dfrac{32}{5}P_0^2 - \dfrac{8}{9}P_0$,

$\tilde{\mathcal{C}} = -\dfrac{32}{5}P_0 - \dfrac{4}{9}$, $\quad H = \dfrac{16}{15}P_0^3 - \dfrac{7}{72}P_0^2$,

4. $\tilde{\mathcal{A}} = -\dfrac{32}{15}$, $\quad\tilde{\mathcal{D}} = -\dfrac{4i\sqrt{15}}{9}P_0$,

$\tilde{\mathcal{B}} = -\dfrac{8i\sqrt{15}}{45}$, $\quad\tilde{\mathcal{E}} = -\dfrac{32}{5}P_0^2 - \dfrac{8}{9}P_0$,

$\tilde{\mathcal{C}} = -\dfrac{32}{5}P_0 - \dfrac{4}{9}$, $\quad H = \dfrac{16}{15}P_0^3 - \dfrac{7}{72}P_0^2$,

---

[4] При $\tilde{\mathcal{B}} = 0$ решения с $\tilde{\mathcal{D}} \neq 0$ возможны и при $C = -16$ или $C = -1$, но только в интегрируемых случаях. Данные решения системы (8) соответствуют известным траекториям.

[5] Возникающие при данных значениях параметров однопараметрические решения ($P_0 = 0$) подробно рассмотрены в наших предыдущих работах (см. пример 2.2 статьи [15], и приложение статьи [19]).

5. $\tilde{\mathcal{A}} = -\dfrac{32}{15}$, $\qquad \tilde{\mathcal{D}} = \dfrac{\sqrt{65}\sqrt{561}}{11329956}(26928P_0 + 8125)$,

$\tilde{\mathcal{B}} = \dfrac{8}{8415}\sqrt{65}\sqrt{561}$, $\qquad \tilde{\mathcal{E}} = -\dfrac{32}{5}P_0^2 - \dfrac{3496}{1683}P_0 - \dfrac{333125}{7553304}$,

$\tilde{\mathcal{C}} = -\dfrac{32}{5}P_0 - \dfrac{1748}{1683}$,

$$H = \frac{16}{15}P_0^3 + \frac{7291}{13464}P_0^2 + \frac{6426875}{181279296}P_0 + \frac{17551324375}{9762977765376},$$

6. $\tilde{\mathcal{A}} = -\dfrac{32}{15}$, $\qquad \tilde{\mathcal{D}} = -\dfrac{\sqrt{65}\sqrt{561}}{11329956}(26928P_0 + 8125)$,

$\tilde{\mathcal{B}} = -\dfrac{8}{8415}\sqrt{65}\sqrt{561}$, $\qquad \tilde{\mathcal{E}} = -\dfrac{32}{5}P_0^2 - \dfrac{3496}{1683}P_0 - \dfrac{333125}{7553304}$,

$\tilde{\mathcal{C}} = -\dfrac{32}{5}P_0 - \dfrac{1748}{1683}$,

$$H = \frac{16}{15}P_0^3 + \frac{7291}{13464}P_0^2 + \frac{6426875}{181279296}P_0 + \frac{17551324375}{9762977765376}.$$

Итак, каждому значению P_0 соответствуют шесть решений системы (8). Первые два решения (с $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{D}} = 0$) сводятся к решениям уравнения (4), остальные решения являются новыми. Полученные решения системы Хенона–Хейлеса зависят от двух параметров: энергии H, выражаемой через P_0, и параметра t_0, связанного с однородностью времени. Использование P_0 в качестве параметра вместо H позволяет записать коэффициенты уравнения (6) в более лаконичной форме. Так как возможно, что одна функция y соответствует нескольким решениям уравнения (8), рассмотрим данный вопрос более подробно.

Если полином, стоящий в правой части уравнения (6), имеет кратные корни, то функции ϱ и y выражаются в элементарных функциях и нетрудно получить явный вид решения. Например, при $P_0 = 0$ подстановка решений 3 и 4 в уравнение (5) приводит к

$$y_t^2 + \frac{32}{15}y^3 + \frac{4}{9}y^2 \pm \frac{8i}{\sqrt{135}}y^{5/2} = 0 \qquad (9)$$

и, в зависимости от выбора знака перед последним слагаемым, т.е. в зависимости от выбора или решения 3, или решения 4, получаем либо (в случае знака +):

$$y = -\frac{5}{3\left(1-3\sin\left(\frac{t-t_0}{3}\right)\right)^2} \quad \text{, либо} \quad y = -\frac{5}{3\left(1+3\sin\left(\frac{t-\tilde{t}_0}{3}\right)\right)^2}. \quad (10)$$

Как легко видеть, полученные однопараметрические решения совпадают: выбирая $\tilde{t}_0 = \pi - t_0$, получаем из второго решения первое.

Более сложным является случай, когда все корни различны, и решение оказывается эллиптической функцией, т.е. двояко-периодической и мероморфной [17]. Каждая эллиптическая функция, не являющаяся тождественно постоянной, имеет полюса, причём в любом параллелограмме периодов число полюсов конечно, а сумма вычетов по всем полюсам равна нулю.

Функции, заданные дифференциальными уравнениями, удобно сравнивать, разлагая их в ряды Лорана. Алгоритм построения решения автономного дифференциального уравнения в виде ряда Лорана был разработан С.В. Ковалевской [22] и усовершенствован в работе [5]. Данный алгоритм, как один из вариантов теста Пенлеве, широко применяется для нахождения интегрируемых случаев систем дифференциальных уравнений. Не ограничивая общности можно предположить, что решения уравнения (6) имеют особенности при $t=0$. Выпишем первые члены рядов Лорана функций y, соответствующих решениям 3–6:

$$y_3 = -\frac{15}{8}\,\frac{1}{t^2} - \frac{5\sqrt{2}}{32}\,\frac{1}{t} - \frac{205}{2304} - \frac{115\sqrt{2}}{13824}\,t - \frac{1819}{663552}\,t^2 + \\ + \left(\frac{\sqrt{2}}{36}P_0^2 - \frac{6551\sqrt{2}}{23887872}\right)t^3 + \left(\frac{64}{1575}P_0^3 + \frac{19}{2160}P_0^2 - \frac{858455}{12039487488}\right)t^4 + \ldots$$

$$y_4 = -\frac{15}{8}\,\frac{1}{t^2} + \frac{5\sqrt{2}}{32}\,\frac{1}{t} - \frac{205}{2304} + \frac{115\sqrt{2}}{13824}\,t - \frac{1819}{663552}\,t^2 - \\ - \left(\frac{\sqrt{2}}{36}P_0^2 - \frac{6551\sqrt{2}}{23887872}\right)t^3 + \left(\frac{64}{1575}P_0^3 + \frac{19}{2160}P_0^2 - \frac{858455}{12039487488}\right)t^4 + \ldots \quad (11)$$

$$y_5 = -\frac{15}{8}\,\frac{1}{t^2} + \frac{5\sqrt{4862}i}{5984}\,\frac{1}{t} - \frac{69335}{430848} - \frac{37745i\sqrt{4862}}{483411456}\,t - \frac{8700683}{1364926464}\,t^2 - \\ - \sqrt{4862}i\left(\frac{1}{6732}P_0^2 + \frac{8125}{90639648}P_0 + \frac{159611009}{17356404916224}\right)t^3 + \ldots$$

$$y_6 = -\frac{15}{8}\,\frac{1}{t^2} - \frac{5\sqrt{4862}i}{5984}\,\frac{1}{t} - \frac{69335}{430848} + \frac{37745i\sqrt{4862}}{483411456}\,t - \frac{8700683}{1364926464}\,t^2 + \\ + \sqrt{4862}i\left(\frac{1}{6732}P_0^2 + \frac{8125}{90639648}P_0 + \frac{159611009}{17356404916224}\right)t^3 + \ldots$$

Функция ϱ, решение уравнения (6), является эллиптической функцией второго порядка, представимой в виде [23, гл. 5]:

$$\varrho(t-t_0) = \frac{a\wp(t-t_0)+b}{c\wp(t-t_0)+d}, \qquad (ad-bc=1)$$

где $\wp(t)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, а t_0 — произвольный параметр. Периоды $\wp(t)$ и значения констант a, b, c и d определяются уравнением (6). Функция

$$y(t-t_0) = \left(\frac{a\wp(t-t_0)+b}{c\wp(t-t_0)+d}\right)^2 + P_0 \tag{12}$$

является эллиптической функцией четвёртого порядка. Функция y, как решение уравнения (3), может иметь полюса только второго порядка, следовательно, в параллелограмме периодов она может иметь только два полюса, причём сумма вычетов в них должна быть равна нулю. Из разложений (11) следует, что вычеты в точке $t=0$ функций y, соответствующих решениям 3–6, не равны нулю и попарно противоположны. Например, функция y_3 в точке 0 имеет вычет равный $5\sqrt{2}/32$. Это означает, что существует точка $t_0 \neq 0$, в которой функция y_3 имеет полюс с вычетом равным $-5\sqrt{2}/32$. Единственный возможный ряд Лорана с данным вычетом — это ряд Лорана функции y_4 (возможно, с другим значением P_0). Легко показать, что значение P_0 остаётся неизменным. Система Хенона–Хейлеса и уравнение (3) инвариантны относительно замены независимой переменной t на $-t$. Следовательно, если $y(t)$ — решение уравнения, то и $y(-t)$ — решение уравнения. Как легко заметить, такая замена эквивалентна замене ϱ на $-\varrho$, т.е. переходу от y_3 к y_4 (и, соответственно, от y_5 к y_6). Функция $\wp(t)$ — чётная, следовательно, функции $y_3(t)$ и $y_3(-t)$ принадлежат одному однопараметрическому семейству функций $y_3(t-t_0)$, сие означает, что в параллелограмме периодов функция $y_3(t-t_0)$ имеет два полюса второго порядка с противоположными вычетами и одинаковым значением P_0. Иных полюсов функция $y_3(t-t_0)$ иметь не может, так как является эллиптической функцией четвёртого порядка. Таким образом, получаем, что функции y_3 и y_4 с одинаковым значением P_0 образуют одно однопараметрическое семейство решений. Аналогично доказывается, что функции y_5 и y_6 образуют иное однопараметрическое семейство решений, и в результате каждому значению P_0 соответствуют два однопараметрических решения. Итак, мы получили два двухпараметрических решения. Данные решения отличны от решений уравнения (4), так как последние являются эллиптическими функциями второго порядка [17, 23].

Одному значению H могут соответствовать несколько (не более трёх) значений P_0, следовательно, до шести различных однопараметрических семейств решений могут соответствовать одному значению энергии H. Например, кроме тригонометрического решения (10) существуют четыре эллиптических решения с энергией $H = 0$.

Случай $C = -4/3$ рассматривается аналогично. Например, при $\lambda = 16/9$ система (8) имеет следующие решения с $\tilde{\mathcal{B}} \neq 0$ или $\tilde{\mathcal{D}} \neq 0$:

$$\mathbf{1}.\quad \tilde{\mathcal{A}} = -\frac{4}{3}, \qquad \tilde{\mathcal{B}} = \frac{4i\sqrt{5}}{15}, \qquad \tilde{\mathcal{C}} = -4P_0 - 1,$$
$$\tilde{\mathcal{D}} = \frac{2i\sqrt{5}}{3}P_0, \quad \tilde{\mathcal{E}} = -\frac{17}{3}P_0^2 - 2P_0, \quad H = \frac{1}{16}P_0^2(40P_0 + 17),$$

$$\mathbf{2}.\quad \tilde{\mathcal{A}} = -\frac{4}{3}, \qquad \tilde{\mathcal{B}} = -\frac{4i\sqrt{5}}{15}, \qquad \tilde{\mathcal{C}} = -4P_0 - 1,$$
$$\tilde{\mathcal{D}} = -\frac{2i\sqrt{5}}{3}P_0, \quad \tilde{\mathcal{E}} = -\frac{17}{3}P_0^2 - 2P_0, \quad H = \frac{1}{16}P_0^2(40P_0 + 17),$$

$$\mathbf{3}.\quad \tilde{\mathcal{A}} = -\frac{4}{3}, \qquad \tilde{\mathcal{D}} = \frac{\sqrt{5}}{132\sqrt{11}}(88P_0 + 117),$$
$$\tilde{\mathcal{B}} = \frac{4\sqrt{5}}{15\sqrt{11}}, \qquad \tilde{\mathcal{E}} = -\frac{131648P_0^2 + 193776P_0 + 24921}{23232},$$
$$\tilde{\mathcal{C}} = -11P_0 - \frac{43}{22}, \qquad H = \frac{5}{2}P_0^3 + \frac{247}{44}P_0^2 + \frac{25857}{15488}P_0 + \frac{112671}{681472},,$$

$$\mathbf{4}.\quad \tilde{\mathcal{A}} = -\frac{4}{3}, \qquad \tilde{\mathcal{D}} = -\frac{\sqrt{5}}{132\sqrt{11}}(88P_0 + 117),$$
$$\tilde{\mathcal{B}} = -\frac{4\sqrt{5}}{15\sqrt{11}}, \qquad \tilde{\mathcal{E}} = -\frac{131648P_0^2 + 193776P_0 + 24921}{23232},$$
$$\tilde{\mathcal{C}} = -11P_0 - \frac{43}{22}, \qquad H = \frac{5}{2}P_0^3 + \frac{247}{44}P_0^2 + \frac{25857}{15488}P_0 + \frac{112671}{681472}.$$

Повторяя проведённый выше анализ, легко увидеть, что и в этом случае четыре нетривиальных решения системы (8) порождают два двухпараметрических семейства решений: решения 1 и 2 соответствуют одному семейству, а решения 3 и 4 — другому. Произвольными параметрами снова являются P_0 и t_0.

4 ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ

Выше мы всё время говорили о решениях уравнения (3). Действительно, приведённые выше решения определяют величину скорости y_t, а, следовательно, и саму координату y. Траектория движения может быть легко получена из второго уравнения системы (2):

$$x^2 = -y_{tt} - y + Cy^2. \tag{13}$$

Для вычисления y_{tt} следует воспользоваться формулой (5) с заменой в ней y на $y - P_0$. После подстановки полученного значения y_{tt} уравнение (13) примет вид:

$$\begin{aligned} x^2 \;&=\; (C - \tfrac{3}{2}\tilde{\mathcal{A}})y^2 + (3\tilde{\mathcal{A}}P_0 - \tilde{\mathcal{C}} - 1)y - \tfrac{1}{4}(5\tilde{\mathcal{B}}y + 3\tilde{\mathcal{D}} - \\ &-\; 5\tilde{\mathcal{B}}P_0)(y - P_0)^{1/2} - \tfrac{1}{2}(\tilde{\mathcal{E}} + 3\tilde{\mathcal{A}}P_0^2 - 2\tilde{\mathcal{C}}P_0). \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что при нулевых значениях коэффициентов $\tilde{\mathcal{B}}$ и $\tilde{\mathcal{D}}$ получаются простые алгебраические траектории, полный список которых приведён в работе [14].

В качестве примера приведём уравнения траекторий движения, которые соответствуют отдельным решениям, полученным для $C = -16/5$ и $\lambda = 1/9$.

Как нетрудно показать, в случае решения 1 уравнение (14) сводится к равенству $x^2 = 0$. Иными словами, получаем известное прямолинейное движение по одной из координатных осей с произвольной постоянной энергией H. Заметим, что это решение существует при любых значениях C и λ, что непосредственно видно из самих уравнений движения (2). Этот же результат легко получается и из системы (8).

Для решения 2 уравнение (14) приводится к виду :

$$x^2 + \frac{6}{5}\left(y + \frac{20}{99}\right)^2 = \frac{50}{1089}. \tag{15}$$

Таким образом, здесь траекторией движения оказывается эллипс. Следует, однако заметить, что реальное движение может происходить не обязательно по всему эллипсу, это будет зависеть от двух произвольных параметров, одним из которых можно считать постоянную энергии H.

Уравнение траектории в случае решений 3 и 4 может быть записано одной общей формулой :

$$\left(x^2 + \frac{5}{9}y\right)^2 + \frac{5}{27}(y - P_0)(2y - P_0)^2 = 0.$$

Очевидно, что здесь тоже реальные движения возможны только на отдельных участках траектории в зависимости от начальных данных, которые определяются значениями энергетической константы H и начальным моментом времени t_0. Полный анализ возможных движений требует отдельного рассмотрения. Для нулевого значения энергии H и $P_0{=}0$ уравнение для одной из ветвей траектории может быть преобразовано к виду:

$$x^2 = -\frac{5}{9}y - \frac{2y}{3}\left(-\frac{5y}{3}\right)^{(1/2)},$$

что полностью совпадает с траекторией, полученной нами ранее [15]. Очевидно, для существования реальных движений здесь необходимо, чтобы y оставалось меньше нуля во все время движения. Формулы (10) как раз и описывают такое решение.

Как нетрудно видеть, уравнение траекторий движения в случае решений 5 и 6 будет иметь такую же структуру как и в рассмотренном случае решений 3 и 4, поэтому конкретный вид уравнения здесь не приводится.

5 ПЕРСПЕКТИВА НАХОЖДЕНИЯ ТРЁХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Общие решения системы Хенона–Хейлеса известны только в интегрируемых случаях [24], в остальных случаях не только четырёх-, но даже и трёхпараметрические точные решения пока не найдены.

В интегрируемых случаях решения (точнее, функции y и x^2) являются однозначными функциями на всей комплексной t-плоскости. Разлагая данные решения в окрестностях точки сингулярности, получаем ряды Лорана, коэффициенты которых зависят от трёх произвольных параметров (четвёртый параметр определяет положение точки сингулярности). В неинтегрируемых случаях системы Хенона-Хейлеса разложения решений в окрестностях сингулярных точек оказываются пси-рядами и могут включать в себя как логарифмы, так и члены с дробными, иррациональными и даже комплексными степенями t. Данные решения, как было недавно доказано [25], являются не формальными, а действительными решениями, так как имеют ненулевой радиус сходимости. Проанализировать характер поведения решений в окрестностях сингулярных точек и построить частные решения в виде рядов Лорана удаётся с помощью анализа Пенлеве [5, 6, 7, 26].

Предположим, что в окрестности особой точки t_0 решения системы (2) стремятся к бесконечности как $x = a_\alpha(t-t_0)^\alpha$ и $y = b_\beta(t-t_0)^\beta$. Если α и β — целые числа, то подстановка разложений вида:

$$x = a_\alpha(t-t_0)^\alpha + \sum_{k=1}^{N_{max}} a_{k+\alpha}(t-t_0)^{k+\alpha}, \qquad y = b_\beta(t-t_0)^\beta + \sum_{k=1}^{N_{max}} b_{k+\beta}(t-t_0)^{k+\beta}$$

позволяет свести систему дифференциальных уравнений к множеству последовательно решаемых линейных алгебраических систем на коэффициенты a_k и b_k. В общем случае точные решения в виде рядов Лорана возможно получить, только решив бесконечное число систем ($N_{max} = \infty$). В то же время решение конечного числа систем позволяет получить решения с точностью до $\mathcal{O}(t^{N_{max}})$. Последовательное решение линейных алгебраических систем может быть проведено на ЭВМ с помощью системы компьютерной алгебры. Однако для подобной автоматизации необходимо предварительно определить значения констант α, β, a_α и b_β и номера систем, детерминанты которых равны нулю. Эти системы соответствуют тем степеням t (часто называемым резонансами), в коэффициентах при которых могут появляться новые произвольные параметры.

Существуют два различных типа поведения решений системы Хенона–Хейлеса в окрестности сингулярности [7, гл. 8]:

Случай 1	*Случай 2*: $\beta < \Re e(\alpha)$
$\alpha = -2$, $\beta = -2$, $a_\alpha = \pm 3\sqrt{2+C}$, $b_\beta = -3$, $r = -1,\ 6,\ \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{1-24(1+C)}}{2},\ \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1-24(1+C)}}{2}$	$\alpha = \frac{1\pm\sqrt{1-48/C}}{2}$, $\beta = -2$, $a_\alpha = c_1$ (произвольно), $b_\beta = \frac{6}{C}$, $r = -1,\ 0,\ 6,\ \mp\sqrt{1-\frac{48}{C}}$

Значения переменной r обозначают резонансы: $r = -1$ соответствует t_0, $r = 0$ (в *Случае 2*) соответствует тому, что ведущий член пропорционален произвольному параметру c_1. Остальные значения r определяют степени t, а именно, $t^{\alpha+r}$ для x и $t^{\beta+r}$ для y, при которых появляются новые произвольные коэффициенты (как решения линейной системы с нулевым детерминантом).

Для интегрируемости системы (2) необходимо, чтобы все значения r были бы целыми и все системы с нулевыми детерминантами имели решения при любых значениях входящих в них свободных параметров. Это возможно только в случаях (i) — (iii).

Однозначные трёхпараметрические решения могут существовать только при таких C, при которых r оказывается целым. При $C = -4/3$ в *Случае 1* имеем $r = -1,\ 1,\ 4,\ 6$, а при $C = -16/5$ в *Случае 2*, соответственно, получаем $r = -1,\ 0,\ 4,\ 6$, то есть рассмотренные нами случаи удовлетворяют этому условию[6]. Как было показано в [19], в обоих этих случаях для произвольного λ существуют сходящиеся двухпараметрические ряды Лорана, обобщающие однопараметрические ряды Лорана представленных здесь решений. Перспективы нахождения точных трёхпараметрических решений уравнения (3), обобщающих полученные в данной статье двухпараметрические решения, представляются реальными, так как отсутствуют препятствия их существованию в виде однозначных функций. Более того, так как полученные в данной статье решения являются эллиптическими, то можно предположить, что и трёхпараметрические решения окажутся эллиптическими функциями. В этом случае они могут быть найдены с помощью нового метода, разработанного для получения аналитической формы эл-

[6]Примечательно, что все значения C, при которых существуют решения системы (8) с $\tilde{\mathcal{B}} \neq 0$ или $\tilde{\mathcal{D}} \neq 0$, соответствуют целым значения r.

липтической функции, известной только в виде ряда Лорана [27].

Общие (четырёхпараметрические) решения оказываются многозначными, так как в их разложения в окрестностях сингулярных точек входят логарифмы.

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для системы Хенона–Хейлеса с $C = -16/5$ или $C = -4/3$ и произвольным λ получены двухпараметрические решения в виде эллиптических функций. Каждой паре значений C и λ соответствуют два двухпараметрических решения. Точные частные трёхпараметрические решения неинтегрируемой системы Хенона–Хейлеса не известны. С помощью теста Пенлеве показано, что в данных неинтегрируемых случаях существуют локальные трёхпараметрические решения в виде сходящихся рядов Лорана. При фиксации одного из параметров данные ряды Лорана совпадают с рядами Лорана полученных точных решений.

С.В. выражает благодарность В.Ф. Еднералу, Р. Конту (R. Conte) и А.К. Погребкову за полезные обсуждения. Данная работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, гранты № 00-15-96560, № 00-15-96577 и НШ–1685.2003.2, и грантом научной Программы "Университеты России" № УР.02.03.002.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В случае произвольного λ получаем структуру решений аналогичную рассмотренным частным случаям. Решения с $\tilde{\mathcal{B}} = 0$ и $\tilde{\mathcal{D}} = 0$ сводятся к решениям уравнения (4), остальные решения могут быть разбиты на пары, так что каждой паре соответствует одно двухпараметрическое семейство функций y, решений уравнения (3). Для системы Хенона-Хейлеса с $C = -16/5$ и $C = -4/3$ получаются по два двухпараметрических решения, при этом решения системы (8), соответствующие одному значению C, различаются только знаком $S_q(\lambda)$ (для $C = -16/5$) или $R_q(\lambda)$ (для $C = -4/3$). Новые решения системы Хенона–Хейлеса порождаются следующими решениями системы (8):

$$C = -\frac{16}{5},$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = -\frac{32}{15},$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = -\frac{\sqrt{1122}\sqrt{F_1(\lambda, P_0)}(1120\lambda + 41888P_0 + 65S_q(\lambda) + 6195)}{29373960(3600\lambda^2 - 1120\lambda P_0 - 2425\lambda - 20944P_0^2 - 6195P_0 + 225)},$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = -\frac{240}{187}\lambda - \frac{32}{5}P_0 + \frac{4}{1309}S_q(\lambda) - \frac{112}{187},$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \frac{\sqrt{1122}}{5874792}\sqrt{F_1(\lambda, P_0)},$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{88320}{244783}\lambda^2 - \frac{480}{187}\lambda P_0 + \frac{885}{244783}\lambda S_q(\lambda) - \frac{153375}{244783}\lambda -$$
$$- \frac{32}{5}P_0^2 + \frac{8}{1309}P_0 S_q(\lambda) - \frac{224}{187}P_0 - \frac{685}{3916528}S_q(\lambda) + \frac{168855}{3916528},$$

$$H = -\frac{11516270}{45774421}\lambda^3 + \frac{8740}{34969}\lambda^2 P_0 - \frac{3296515}{2563367576}\lambda^2 S_q(\lambda) + \frac{50336425}{183097684}\lambda^2 +$$
$$+ \frac{258}{187}\lambda P_0^2 - \frac{8209}{1958264}\lambda P_0 S_q(\lambda) + \frac{76915}{279752}\lambda P_0 + \frac{12202395}{82027762432}\lambda S_q(\lambda) -$$
$$- \frac{131879855}{11718251776}\lambda + \frac{16}{15}P_0^3 - \frac{43}{13090}P_0^2 S_q(\lambda) + \frac{103}{1496}P_0^2 + \frac{8881}{31332224}P_0 S_q(\lambda) -$$
$$- \frac{71205}{4476032}P_0 - \frac{12990165}{1312444198912}S_q(\lambda) - \frac{168661575}{187492028416},$$

где

$$F_1(\lambda, P_0) \equiv 39474176000\lambda^3 + 122782105600\lambda^2 P_0 - 104358400\lambda^2 S_q(\lambda) -$$
$$- 17822336000\lambda^2 - 210552545280\lambda P_0^2 - 680261120\lambda P_0 S_q(\lambda) -$$
$$- 10941145600\lambda P_0 - 41066800\lambda S_q(\lambda) + 8305290000\lambda -$$
$$- 501315584P_0^2 S_q(\lambda) - 65797670400P_0^2 - 55920480P_0 S_q(\lambda) +$$
$$+ 1611640800P_0 + 2884725S_q(\lambda) - 468507375,$$

$$S_q(\lambda) \equiv \pm\sqrt{35(2048\lambda^2 - 1280\lambda + 387)}.$$

$$C = -\frac{4}{3},$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = -\frac{4}{3},$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \frac{\sqrt{330}(952\lambda - 616P_0 + 13R_q(\lambda) - 945)}{38115(432\lambda^2 + 952\lambda P_0 - 291\lambda - 308P_0^2 - 945P_0 + 27)}\sqrt{F_2(\lambda, P_0)},$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = -\frac{4}{33}\lambda - 4P_0 - \frac{1}{66}R_q(\lambda) - \frac{31}{22},$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \frac{\sqrt{330}}{7623}\sqrt{F_2(\lambda, P_0)},$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{3394}{363}\lambda^2 + \frac{54}{11}\lambda P_0 - \frac{1123}{10164}\lambda R_q(\lambda) - \frac{5897}{484}\lambda + \\ - \frac{17}{3}P_0^2 - \frac{31}{308}P_0 R_q(\lambda) - \frac{349}{44}P_0 + \frac{1223}{27104}R_q(\lambda) + \frac{13005}{3872},$$

$$H = -\frac{552922}{83853}\lambda^3 - \frac{29801}{2541}\lambda^2 P_0 + \frac{173605}{2347884}\lambda^2 R_q(\lambda) + \frac{778033}{74536}\lambda^2 - \\ - \frac{185}{66}\lambda P_0^2 + \frac{3001}{20328}\lambda P_0 R_q(\lambda) + \frac{104959}{6776}\lambda P_0 - \frac{695609}{12522048}\lambda R_q(\lambda) - \\ - \frac{2990049}{596288}\lambda + \frac{5}{2}P_0^3 + \frac{89}{1232}P_0^2 R_q(\lambda) + \frac{865}{176}P_0^2 - \frac{3065}{54208}P_0 R_q(\lambda) - \\ - \frac{225909}{54208}P_0 + \frac{2733}{260876}R_q(\lambda) + \frac{57699}{74536},$$

где

$$F_2(\lambda, P_0) \equiv 2099776\lambda^3 - 497728\lambda^2 P_0 - 20008\lambda^2 R_q(\lambda) - 4911144\lambda^2 + \\ + 948640\lambda P_0^2 + 19096\lambda P_0 R_q(\lambda) + 1458072\lambda P_0 + 37173\lambda R_q(\lambda) + \\ + 3943233\lambda + 6776 P_0^2 R_q(\lambda) - 711480 P_0^2 - 9240 P_0 R_q(\lambda) - \\ - 615384 P_0 - 13581 R_q(\lambda) - 1006425,$$

$$R_q(\lambda) \equiv \pm\sqrt{7(1216\lambda^2 - 1824\lambda + 783)}.$$

Список литературы

[1] *Contopoulos G.,* A Third Integral of Motion in a Galaxy // Zeitschrift für Asrtophysik. 1960. V. 49. P 273–291.

[2] *Contopoulos G.,* On the Existence of a Third Integral of Motion // Astron. J. 1963. V. 68, P. 1–14; Resonance Cases and a Small Divisors in a Third Integral of Motion // Astron. J. 1963. V. 68, P. 763–779.

[3] *Hénon M., Heiles C.,* The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments // Astron. J. 1964. V. 69. P. 73–79.

[4] *Painlevé P.,* ***Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, profeesées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le roi de Suède et de Norwège***, Hermann, Paris, 1897; Reprinted in: ***Œuvres de Paul Painlevé***, ed. du CNRS, Paris, 1973. On-line version: The Cornell Library Historical Mathematics Monographs http://historical.library.cornell.edu/

[5] *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.,* A Connection between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type. I & II // J. Math. Phys. 1980. vol. 21. P. 715–721, 1006–1015.

[6] *Conte R.* (ed.), ***The Painlevé property, one century later***, Proceedings of the Cargèse school (3–22 June, 1996), CRM series in mathematical physics, 810 pages, Springer, Berlin, New York, 1999.

[7] *Tabor M.,* ***Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics***, Wiles, New York, 1989. Перевод: *Табор М.,* ***Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике***. Москва: УРСС, 2001.

[8] *Vernov S.Yu.,* The Painlevé Analysis and Special Solutions for Nonintegrable Systems // *arXiv:math-ph*/0203003, 2002.

[9] *Kokubun F.,* Gravitational waves from the Hénon–Heiles system // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 2610–2612.

[10] *Podolský Ji., Veselý K.,* Chaos in *pp*—wave spacetime // Phys. Rev. D. 1998. V. 58. 081501.

[11] *Weiss J.,* Bäcklund Transformation and Linearizations of the Hénon–Heiles System // Phys. Lett. A. 1984. V. 102. P. 329–331; Bäcklund Transformation and the Hénon–Heiles System // Phys. Lett. A. 1984. V. 105. P. 387–389.

[12] *Тимошкова Е.И.,* Орбиты параболического типа для одной модели галактических потенциалов // Астрон.журн. 1991. Т. 68. С. 1315.

[13] *Conte R., Musette M.,* Link between solitary waves and projective Riccati equations // J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 5609–5623.

[14] *Антонов В.А., Тимошкова Е.И.,* Простые траектории в ротационно-симметричном гравитационном поле // Астрон. журн. 1993. Т. 70. С. 265.

[15] *Тимошкова Е.И.,* Новый класс траекторий движения в потенциальном поле Хенона-Хейлеса // Астрон. журн. 1999. Т. 76. С. 470–475. Перевод: *Timoshkova E.I.,* A New Class of Trajectories of Motion in a Henon-Heiles Potential Field// Astronomy Reports, 1999. Vol.43, N6, P. 406-411

[16] *Timoshkova E.I.,* A New Class of Periodic Orbits in the Henon-Heiles Potential Field // Stellar Dynamics:from classic to modern. Proceedings of the International Conference. Ed. L.P. Ossipkov and I.I. Nikiforov, St. Petersburg, 2001, P. 201–205.

[17] *Erdélyi A. et al.* (eds.) ***Higher Transcendental Functions (based, in part, on notes left by H. Bateman)***. Vol. 3, MC Graw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1955. Перевод: *Бейтман Г., Эрдейи А.,* ***Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье)***, Москва: Наука, 1967.

[18] *Vernov S.Yu.,* Construction of solutions for the generalized Hénon–Heiles system with the help of the Painlevé test // Preprint SINP MSU, 2002-21/705, *arXiv:math-ph*/0209063, 2002.

[19] *Вернов С.Ю.,* Построение решений обобщённой системы Хенона–Хейлеса с помощью теста Пенлеве // ТМФ. 2003. Т. 135. С. 409–419 {Русский} P. 792–801 {Английский}.

[20] *Hearn A.C.,* ***REDUCE. User's Manual. Vers. 3.6***, RAND Publication CP78 (Rev. 7/95), Santa Monica, California, USA, 1995, http://www.unikoeln.de/REDUCE/3.6/doc/reduce/
REDUCE. User's and Contributed Packages Manual, Vers. 3.7,

Santa Monica, CA and Codemist Ltd, 1999,
http://www.zib.de/Symbolik/reduce/more/moredocs/reduce.pdf

[21] *Еднерал В.Ф., Крюков А.П., Родионов А.Я.* ***Язык аналитических вычислений REDUCE***, Москва: Изд-во МГУ, 1989.

[22] *Kovalevskaya S.V. (Kowalevski S.)* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Mathematica. 1889. V. 12, P. 177–232; Sur une properiété du sustème d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Mathematica. 1890. V. 14, P. 81–93. Перевод: *Ковалевская С.В.* ***Научные работы***, Москва: Изд-во АН СССР, 1948.

[23] *von Hurwitz A., von Courant R.,* ***Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen***, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1964. Перевод: *Гурвиц А., Курант Р.* ***Теория функций***, Москва: "Наука", 1968.

[24] *Conte R., Musette M., Verhoeven C.,* Integration of a generalized Hénon–Heiles Hamiltonian // J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 1906–1915. *arXiv:nlin.SI*/0112030. 2001. General solution for Hamiltonians with extended cubic and quartic potensials // ТМФ. 2003. Т. 134. С. 148–159. *arXiv:nlin.SI*/0301011. 2003.

[25] *Melkonian S.,* Psi-series Solutions of the Cubic Hénon–Heiles System and Their Convergence // J. of Nonlin. Math. Phys. 1999. V. 6. P. 139–160,. *arXiv:math.DS*/9904186.

[26] *Голубев В.В.,* ***Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений***, Москва–Ленинград, Гостехиздат, 1950.

[27] *Conte R., Musette M.,* Analytic solitary waves of nonintegrable equations // Physica D. 2003. in press. *arXiv:nlin.PS*/0302051.

Сергей Юрьевич Вернов

Елена Ивановна Тимошкова

Новые двухпараметрические решения обобщённой системы Хенона–Хейлеса

Препринт НИИЯФ МГУ 2003–14/727

Работа поступила в ОНТИ 30.06.2002 г.

ИД № 00545 от 06.12.1999

Издательский отдел
Учебно-научного центра довузовского образования

117246, Москва, ул. Обручева, 55А
119992, Москва, Ленинские горы, ГЗ МГУ, Ж-105а
Тел./Факс (095) 718-6966, 939-3934
e-mail: izdat@abiturcenter.ru
http://www.abiturcenter.ru

Гигиенический сертификат № 77.99.2.925.П.9139.2.00 от 24.02.2000
Налоговые льготы - Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93. том 1-953000

Заказное. Подписано в печать 30.06.2003г. Формат 60x90/16
Бумага офсетная № 2. Усл. печ.л. 1,38
Тираж 50 экз. Заказ №

Отпечатано в Мини-типографии УНЦ ДО