

А.М.Снигирев

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ХРОМОДИНАМИКУ

Препринт НИИЯФ МГУ 2004-11/750

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Д.В.СКОБЕЛЬЦЫНА

А.М.Снигирев

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ХРОМОДИНАМИКУ

Препринт НИИЯФ МГУ 2004-11/750

УДК 539.17+530.145
ББК 22.38

A.M.Snigirev

E-mail: snigirev@lav01.sinp.msu.su

Introduction to quantum chromodynamics

Preprint SINP MSU 2004-11/750

Abstract

The lecture for students of chair of cosmic rays and cosmos physics of MSU physical department.

А.М.Снигирев

Введение в квантовую хромодинамику

Препринт НИИЯФ МГУ 2004-11/750

Аннотация

Лекция для студентов кафедры космических лучей и физики космоса физического факультета МГУ.

©Снигирев А.М., 2004

©НИИЯФ МГУ, 2004

Квантовая хромодинамика (КХД) — квантовая теория сильного взаимодействия цветных (хрома — цвет, *греч.*) глюонных (g) и кварковых (q) полей. Построена на основе принципа локальной калибровочной инвариантности относительно преобразований в трехцветном комплексном пространстве внутренней симметрии. КХД составляет основу описания сильного взаимодействия между адронами и ответственна за силы, связывающие кварки и глюоны в адроны.

КХД зародилась в начале 70-х годов XX века (Fritzsh, Gell-Mann, Leutwyler. Phys. Lett., 1973), но до сих пор далека от завершения. Она возникла в результате синтеза представлений о цвете кварков (Fritzsh, Gell-Mann, Leutwyler. Phys. Lett., 1973), партонной картины (Feynman. Phys. Rev. Lett., 1969; Bjorken. Phys. Rev., 1969) глубоконеупругого рассеяния электронов на протоне $ep \rightarrow eX$ и аппарата неабелевых калибровочных полей (Yang, Mills. Phys. Rev., 1954).

В стандартной кварковой модели, предложенной до создания КХД, все адроны являются связанными состояниями либо кварк-антикварковой пары $q\bar{q}$ (мезоны), либо трех кварков qqq (барионы), либо трех антикварков $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ (антибарионы), и она хорошо объясняет систематику адронов, т.е. их группировку по свойствам в унитарные и изотопические мультиплеты, расщепление по массам внутри этих мультиплетов.

Чтобы не входить в противоречие с принципом Паули при построении некоторых барионов, Гелл-Манн и др. ввели понятие цвета¹.

Например:

$\Delta^{++}(u \uparrow, u \uparrow, u \uparrow)$ — полностью симметричное состояние. Если каждый кварк u обладает цветом и может находиться в любом из трех цветовых состояний $i = 1, 2, 3$; или r, y, v (red, yellow, violet), то Δ^{++} теперь интерпретируется как состояние

$$\sum_{ikl} \varepsilon^{ikl} (u^i \uparrow, u^k \uparrow, u^l \uparrow),$$

уже полностью антисимметричное по отношению к перестановке любых двух частиц (ε^{ikl} — антисимметричный тензор, равный 1 или -1 в зависимости от того, является (ikl) четной или нечетной перестановкой чисел $(1, 2, 3)$).

Необходимость введения трех цветовых степеней свободы следовала и из других **экспериментальных фактов**.

¹Такое внутреннее квантовое число было введено впервые в работах Нап, Nambu. Phys. Rev., 1965 и Боголюбов, Струминский, Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ 1965.

1. Наиболее прямое подтверждение того, что кварки обладают цветом, появляется при измерении полного сечения электрон-позитронной аннигиляции в экспериментах на встречных пучках. Результаты принято представлять в виде отношения сечений

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2; \quad f = u, d, s, c, b, t \text{ (flavour — аромат)}.$$

Экспериментально измеренная зависимость R от E , где E — энергия в системе центра инерции сталкивающихся частиц, хорошо согласуется с вышеприведенной формулой при наличии **3** перед суммой квадратов зарядов (см. рис. 1).

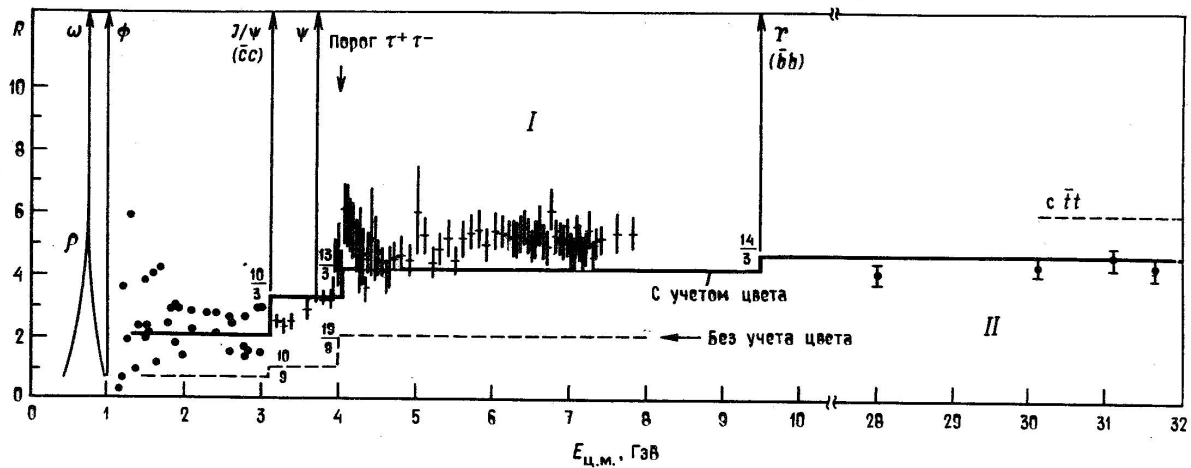
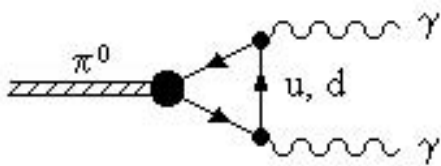


Рис. 1 (из работы [7]). Отношение $R = (e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) / (e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$. Данные SLAC (I) и PETRA (II) имеют разные систематические ошибки, которые на этом рисунке не обозначены. Коридоры ошибок ниже 3 ГэВ велики и здесь не приводятся, чтобы не загромождать рисунок. При энергии выше 28 ГэВ приведена только часть данных.

2. Вероятность распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$



Если бы не было цветовых степеней свободы, то теоретически рассчитанная вероятность была бы в $(\mathbf{3})^2$ раз меньше экспериментально наблюдаемой.

Основу КХД образуют три цветных состояния кваркового поля Дирака $q^i(x)$ каждого аромата $q = u, d, s, c, b, t \dots$; $i = 1, 2, 3$; или r, y, v , преобразующихся друг через друга при преобразовании в цветовом пространстве.

По своей структуре КХД напоминает КЭД. Но есть и существенные отличия.

Как в КЭД электрический заряд вследствие калибровочной инвариантности (симметрии) порождает электромагнитное поле, так в КХД цветные кварки порождают 8 разновидностей цветовых глюонных полей — векторных калибровочных полей Янга-Миллса (Yang, Mills. Phys. Rev., 1954)².

Но глюонные поля, в отличие от электромагнитного поля, несут цветовой заряд, сами порождают глюонные поля и *взаимодействуют друг с другом*.

Поэтому уравнения для глюонных полей, в отличие от уравнений Максвелла в вакууме, **нелинейны**. Квантами глюонного поля являются 8 глюонов (аналоги фотонов в КЭД), имеющих нулевую массу покоя и спин 1. При испускании и поглощении глюонов кварки могут **менять свой цвет**, но **не меняют аромат**, глюоны могут менять только свой цвет.

К чему приводит нелинейность?

Нет принципа суперпозиции: сумма решений уравнения не является решением!

Во многих отношениях построение КХД ведется по схеме, разработанной в КЭД, поэтому вначале необходимо вспомнить некоторые основные этапы этой схемы. Так, уравнения Максвелла в терминах напряженности электрического поля \vec{E} , магнитной индукции \vec{H} , плотностей заряда ρ и

²Группа цветовой симметрии $SU(3)$ изоморфна группе комплексных унитарных ($U^+U = 1$) матриц специального вида: $\det U = 1$.

Матрица $n \times n$ содержит $2n^2$ действительных параметров. Требование $U^+U = 1$, обеспечивающее сохранение нормировки состояний при преобразованиях группы, фиксирует n^2 параметров, еще одно условие дает равенство $\det U = 1$, остается $(n^2 - 1)$ произвольных параметров. При $n = 3$ $n^2 - 1 = 8$ — число независимых матриц-генераторов. Кварки — фундаментальное представление группы $SU(3)$

размерности 3; базисные вектора $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. Глюоны — присоединенное представление группы $SU(3)$ размерности 8 — по числу независимых генераторов; базисные тензора-матрицы q_i^j ($Spq_i^i = \sum_{i=1}^3 q_i^i = 0$).

тока \vec{j} имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \rho, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j}, & \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

+ Локальный закон сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

(Использована система единиц Хэвисайда, в которой закон Кулона записывается в виде $\frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2}$. Скорость света $c = 1$.)

Уравнения электродинамики инвариантны относительно преобразования Лоренца, т.е. если перейти от координат x, y, z, t к x', y', z', t' , полей \vec{E}, \vec{H} к \vec{E}', \vec{H}' и плотностей заряда и тока ρ, \vec{j} к ρ', \vec{j}' , то в уравнениях надо лишь нештрихованные величины заменить на штрихованные. Поэтому удобно использовать компактные обозначения, которые отражают релятивистские ковариантные свойства векторных, тензорных и т.д. полей (ковариантность — свойство физической величины преобразовываться по представлениям группы инвариантности, установленной или предполагаемой для рассматриваемого круга явлений).

Считая, что греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, можно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (t, \vec{x}), & j^\mu &= (\rho, \vec{j}); \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{x}), & j_\mu &= (\rho, -\vec{j}). \end{aligned}$$

Тензор электромагнитного поля:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Производные: $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$.

Дуальный тензор: $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} F_{\rho\tau}$, где $\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}$ — антисимметричный символ Леви-Чивиты, равный 1 или -1 в зависимости от того, является $(\mu\nu\rho\tau)$ четной или нечетной перестановкой чисел $(0, 1, 2, 3)$.

Используя эти обозначения и эйнштейновское соглашение о суммировании по немым индексам, уравнения Максвелла можно записать в

компактном релятивистски инвариантном виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Закон сохранения тока примет вид $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Тензор электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ можно выразить через производные 4-потенциала A^μ :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1)$$

(при этом $\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, $\vec{H} = \text{rot}\vec{A}$) и уравнения Максвелла можно представить еще в одном эквивалентном виде:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \quad (2)$$

$\partial_\mu \partial^\mu = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \Delta \right]$ — оператор Д'Аламбера, Δ — оператор Лапласа.

При этом потенциал A^μ не определяется единственным образом из (1), его можно преобразовать, добавляя 4-градиент. Это преобразование называется калибровочным

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x)$$

($\Lambda(x)$ — любая скалярная функция) и не меняет вид уравнения (2).

В электродинамике калибровочный произвол иногда оказывается досадной помехой, в иных же случаях он является **глубоким и плодотворным принципом!**

4-вектор тока задается расположением классических зарядов и их движением³.

Обычно в ЭД мы решаем два типа задач:

- 1) по заданным токам найти поля;
- 2) определить движение частицы (частиц) в заданных полях.

³Например, 4-вектор тока заряженной точечной частицы, локализованной на ее пространственно-временной траектории $x^\mu(\tau)$, имеет вид

$$j^\mu(\vec{y}, t) = e \frac{dx^\mu}{dt} \delta^3[\vec{y} - \vec{x}(\tau)]|_{t=x^0(\tau)} = e \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^4[y - x(\tau)].$$

Если движение равномерное по прямолинейной траектории со скоростью \vec{v} , то

$$j^0(\vec{y}, t) = e \delta^3(\vec{y} - \vec{v}t),$$

$$\vec{j}(\vec{y}, t) = e \vec{v} \delta^3(\vec{y} - \vec{v}t).$$

При этом поле воздействует на классическую частицу через силу Лоренца

$$F_L = (e\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H})$$

и релятивистски инвариантное уравнение движения (аналог закона Ньютона) частицы массы m имеет вид

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu} u_\nu, \quad (3)$$

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ — 4-вектор скорости, $\tau = \sqrt{t^2 - \vec{x}^2}$ — собственное время.

В более общем случае мы должны совместно решать (2) и (3), т.е. учитывать как воздействие поля на классические частицы, так и его изменение при движении частиц.

Однако при рассмотрении движения **элементарных частиц** язык сил, траекторий **неадекватен**, и мы используем квантовую механику и понятие волновой функции ψ , которая удовлетворяет уравнению Шредингера (вместо уравнений Ньютона, определявших траектории движения)

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi,$$

в котором гамильтониан \hat{H} для частицы в **заданном** внешнем поле имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\vec{x}))^2 + eA^0(\vec{x}) + V(\vec{x}),$$

где $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$, $V(x)$ — потенциал, обусловленный силами неэлектромагнитного (например, ядерного) происхождения.

При этом плотность тока, генерируемая электроном с волновой функцией ψ ,

$$j^0 = e\psi^* \psi,$$

$$\vec{j} = e(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \frac{\hbar}{2mi}$$

будет входить в уравнение Максвелла (2), если мы хотим знать электромагнитное поле, порождаемое таким электроном.

Квантовая механика — **не релятивистски** инвариантная теория. И свободное движение электронов, протонов с релятивистскими скоростями подчиняется уже уравнению Дирака (Dirac)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0,$$

где $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ — 4-компонентный спинорный столбец,
 γ^μ — матрицы Дирака 4×4 :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

σ^i — матрицы Паули (2×2), I — единичная 2×2 матрица.

Сопряженный спинор (строчка) $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ удовлетворяет уравнению⁴

$$\bar{\Psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0,$$

а ток имеет вид

$$j^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi.$$

Взаимодействие с электромагнитным полем (аналог силы Лоренца) вводится минимальным образом — удлинением производной (как в квантовой механике), обеспечивающим локальную калибровочную инвариантность

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu : \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi &= e\gamma^\mu A_\mu\Psi, \\ \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) &= -\bar{\Psi}e\gamma^\mu A_\mu. \end{aligned}$$

В свою очередь электрон-позитронное поле порождает ток в уравнениях Максвелла, которые теперь принимают вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi.$$

Эти уравнения позволяют определить волновые функции электронов-позитронов (электрон-позитронное поле Ψ , $\bar{\Psi}$) и электромагнитное поле A . Они являются релятивистски (относительно преобразований Лоренца) и калибровочно инвариантными.

Калибровочная инвариантность (тесно связанная с равенством нулю массы фотона) означает, что уравнения не изменяются при **локальных** калибровочных преобразованиях

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= e^{ie\Lambda(x)}\Psi(x), \\ \bar{\Psi}'(x) &= \bar{\Psi}(x)e^{-ie\Lambda(x)}, \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x). \end{aligned}$$

⁴В нерелятивистском пределе уравнение Дирака переходит в уравнение Паули — уравнение Шредингера со спином, где фигурируют матрицы Паули.

Без электромагнитного поля уравнение Дирака инвариантно относительно глобальных калибровочных преобразований $\Lambda(x) = \text{const}$, требование локальной калибровочной инвариантности неизбежно ведет к необходимости введения векторного поля.

При построении квантовой теории поля более удобным оказывается Лагранжев формализм (Lagrange). Если у нас есть лагранжиан \mathcal{L} как функция некоторых полей φ и их производных $\partial_\mu\varphi$, то уравнения для этих полей получаются из принципа стационарности действия

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(x),$$

а именно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0.$$

И уравнения Дирака-Максвелла можно получить из лагранжиана ЭД

$$\mathcal{L}_{\text{кэд}} = \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) - (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi) - m \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

вычисляя производные по всем независимым полям и их производным.

Собственно задание лагранжиана — задание теории. Дальше по заданному лагранжиану можно получать уравнения движения, строить матрицу рассеяния, т.е. решать конкретные задачи. Решению этих конкретных задач посвящены целые книги. Но все они в качестве исходного пункта содержат лагранжиан.

Первый и последний члены в $\mathcal{L}_{\text{кэд}}$ представляют собой лагранжианы свободных полей, которые удовлетворяют свободным уравнениям Дирака-Максвелла с правой частью равной нулю (без взаимодействия).

Одним из решений этих свободных уравнений являются плоские волны.

Волновая функция фотона с заданным импульсом k_μ :

$$A_\mu(x) = \frac{e_\mu}{\sqrt{2k^0}} e^{ik_\nu x^\nu}$$

(при условии, что $k_\nu k^\nu = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = 0$, e^μ — 4-вектор поляризации фотона, $(e^\mu)^* e_\mu = -1$).

Волновая функция свободного электрона с импульсом p_μ :

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} u_p e^{ip_\mu x^\mu}$$

(при условии $p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2$, $\bar{u}_p u_p = 2m$, u_p задает поляризационные свойства электрона).

Типичная задача, которая решается в физике высоких энергий (квантовой теории поля) — определить вероятность какого-нибудь процесса рассеяния.

Например:

Сталкиваются две свободные частицы с импульсами P_1 и P_2 (плоские волны), в результате взаимодействия могут образоваться еще частицы с импульсами P'_1, P'_2, P'_3 и требуется рассчитать вероятность такого процесса, т.е. определить матричный элемент

$$\langle f | \hat{S} - 1 | i \rangle,$$

квадрат которого определяет вероятность процесса ($\langle f |$ — конечное состояние — плоские волны с импульсом P'_1, P'_2, \dots , $|i\rangle$ — начальное состояние с импульсами P_1, P_2).

$$\hat{S} = T \left\{ \exp \left[i \int \mathcal{L}_{int}(x) d^4x \right] \right\},$$

T — оператор временного упорядочивания. В КЭД $\mathcal{L}_{int}(x) = -e \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi A^\mu$.

Развита теория возмущений с использованием диаграмм Фейнмана для вычисления таких матричных элементов. Структура и вид этих диаграмм определяются лагранжианом взаимодействия.

Теперь, зная электродинамику, уже можно говорить о КХД, т.к. ее структура близка к КЭД.

Центральный пункт лекции

В КХД есть кварки со спином $1/2$, т.е. в отсутствие взаимодействия можно полагать, что они подчиняются свободному уравнению Дирака, т.е. свободный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_q = \sum_{i,f} \left\{ \frac{i}{2} [\bar{q}_f^i \gamma^\mu (\partial_\mu q_f^i) - (\partial_\mu \bar{q}_f^i) \gamma^\mu q_f^i] - m \bar{q}_f^i q_f^i \right\}$$

(сумма по цвету i и аромату f независимых кварковых полей, которые являются спинорами (4-столбцами)).

Предполагается, что природа инвариантна относительно преобразований, затрагивающих цвет

$$\begin{aligned} q^{i'} &= \sum_i U_{i'i} q^i; \\ \bar{q}^{i'} &= \sum_i \bar{q}^i U_{ii'}^* \end{aligned}$$

(здесь и далее индекс f , отвечающий аромату⁵, для упрощения записи опущен).

⁵Ароматный индекс f "запутывается" при учете слабых взаимодействий.

В матричном виде

$$q' = Uq.$$

Матрицы U (3×3) удовлетворяют условиям:

$$U^+U = 1,$$

$$\text{Det}U = 1,$$

из которых следует, что число независимых матриц — 8.

В КЭД $U = e^{i\Lambda}$ — комплексное число; инвариантность относительно фазовых преобразований при этом

$$\begin{aligned} (e^{i\Lambda})^* e^{i\Lambda} &= 1, \\ |e^{i\Lambda}| &= 1. \end{aligned}$$

Любую матрицу группы $SU(3)$ можно записать, исходя из 8 ее генераторов t^a (**отсюда число глюонов — 8!**)

$$\begin{aligned} U &= \exp\left\{-ig \sum_a \theta_a t^a\right\} \quad a = 1, \dots, 8, \\ [t^a, t^b] &= if^{abc}t^c. \end{aligned}$$

Явный вид этих матриц (Гелл-Манна) и структурных констант f^{abc} можно найти в любом учебнике по КХД; θ_a — некие параметры, задающие вид матриц.

Лагранжиан \mathcal{L}_q инвариантен относительно **глобальных цветовых преобразований**, когда параметры θ_a **не зависят от пространственно-временной точки x** .

В КЭД требование **локальной** калибровочной инвариантности (когда фаза Λ зависит от x) однозначно приводило к виду взаимодействия электронов с абелевыми калибровочными полями фотонов.

В КХД требование локальной калибровочной инвариантности приводит к необходимости введения 8 глюонных векторных бозонных полей, которые взаимодействуют между собой.

В случае инфинитезимальных преобразований $\theta(x)$, когда $\exp\{-ig \sum_a \theta_a t^a\}$ можно разложить,

$$q'^j(x) = q^j(x) - ig \sum_{ak} \theta_a(x) t_{jk}^a q^k(x),$$

$a = 1, \dots, 8$, $j, k = 1, 2, 3$. При этом производные полей преобразуются не так, как поле

$$\partial_\mu q'^j(x) = \partial_\mu q^j(x) - ig \sum_{ak} \theta_a(x) t_{jk}^a \partial_\mu q^k(x) - ig \sum_{ak} t_{jk}^a (\partial_\mu \theta_a(x)) q^k(x)$$

и последний член нарушает инвариантность \mathcal{L}_q .

Однако его можно компенсировать введением восьми (по числу генераторов группы) векторных (из-за производной $\partial_\mu \theta_a(x)$) компенсирующих полей Янга-Миллса (которые предложили эту процедуру для произвольной группы $SU(n)$ в 1954 году!!), преобразующихся по закону

$$B_\mu^{a'}(x) = B_\mu^a(x) + g \sum_{bc} f_{abc} \theta_b(x) B_\mu^c(x) - \partial_\mu \theta^a(x).$$

Требование локальной калибровочной инвариантности позволяет однозначно установить и вид лагранжиана самих полей Янга-Миллса.

В результате локально калибровочно инвариантный лагранжиан КХД имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{КХД}} = & \sum_i \left\{ \frac{i}{2} [\bar{q}^i \gamma^\mu (\partial_\mu q^i) - (\partial_\mu \bar{q}^i) \gamma^\mu q^i] - m \bar{q}^i q^i \right\} + \\ & + g \sum_{ika} \bar{q}^i \gamma^\mu t_{ik}^a q^k B_\mu^a - \frac{1}{4} \sum_a G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

где $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g \sum_{bc} f_{abc} B_\mu^b B_\nu^c$ (в КЭД: $f_{abc} = 0$, $t_{ik}^a = \delta_{ik} \delta_{a1} I$, естественно).

Калибровочная инвариантность приводит однозначно к тому, что одна и та же константа связи g описывает взаимодействие кварков с глюонами и самодействие последних.

Из этого лагранжиана можно получить стандартным образом уравнение движения для классических полей. Например, для кваркового поля

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q^j = -g \sum_{ak} \gamma^\mu t_{jk}^a B_\mu^a q^k.$$

Самодействие глюонов кардинально отличает КХД от КЭД, хотя взаимодействие **кварков с глюонами** во многих отношениях сходно со взаимодействием **электронов (протонов) с фотоном**.

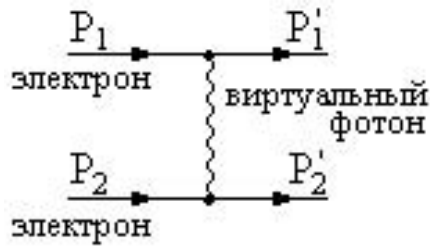
В дальнейшем, зная лагранжиан, можно строить квантовую теорию, действуя как в КЭД по теории возмущений по g .

Приведем только один результат, демонстрирующий кардинальное отличие, вызванное неабелевой структурой глюонов, их самодействием.

Поведение эффективной константы связи

Дело в том, что в квантовой теории поля константа взаимодействия, грубо говоря, вовсе не константа, а зависит от расстояния между частицами.

Так, рассеяние электронов в КЭД описывается в первом порядке диаграммой Фейнмана (условный язык)

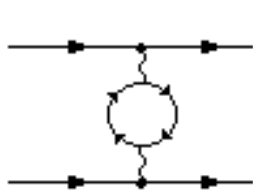


$$\langle P'_1 P'_2 | \hat{S} - 1 | P_1 P_2 \rangle$$

$$q^2 = (P'_1 - P_1)^2$$

Вероятность процесса зависит от q^2 и в нерелятивистском пределе естественно воспроизводит квантовомеханический результат, когда взаимодействие описывается законом Кулона (потенциалом).

Однако учет поправок (поляризация вакуума: виртуальный фотон рождает пару e^+e^-) приводит к тому, что вероятность такого процесса описывается той же формулой, но с другой эффективной константой связи, зависящей от q^2



$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(m^2)}{1 - \frac{\alpha(m^2)}{3\pi} \ln \frac{|q^2|}{m^2}}, \quad m \text{ — масса электрона,}$$

$$\alpha(m^2) = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \text{ — значение константы связи в статическом (Кулоновском) пределе.}$$

С ростом q^2 (уменьшением расстояния) эта величина $\alpha(q^2)$ сравнивается с 1 и теория возмущений КЭД не применима⁶. Наглядно это можно еще представить как изменение кулоновского поля вокруг точечного заряда:

$$A_0 = \frac{e}{r} \left[1 + \frac{2\alpha(m^2)}{3\pi} \left(\ln \frac{1}{mr} - C - 5/6 \right) \right], \quad r \ll 1/m,$$

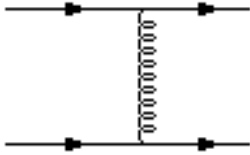
$$A_0 = \frac{e}{r} \left[1 + \frac{\alpha(m^2)}{4\sqrt{\pi}} e^{-2mr} / (mr)^{3/2} \right], \quad r \gg 1/m,$$

где $C = 0.577$ — постоянная Эйлера. Видно, что поляризация вакуума искажает кулоновское поле точечного заряда в области $r \sim 1/m$. Вне этой области искажение поля убывает по экспоненциальному закону.

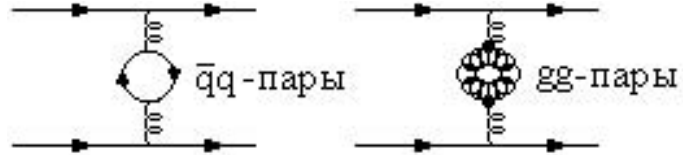
⁶Так, например, равенство $\frac{\alpha(m^2)}{\pi} \ln \frac{|q^2|}{m^2} = 1$ достигается при фантастических импульсах $|q|$ (энергии), $|q| = 10^{93}$ м, но значительно раньше электромагнитные взаимодействия "запутываются" со слабыми и сильными взаимодействиями, в результате чего чистая КЭД теряет смысл!

Так вот, в КХД поведение аналогичной константы **кардинально** другое и именно за счет самодействия глюонов.

Рассеяние кварков



Поправки



Нет в КЭД

Как результат

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \beta_0 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \ln \frac{|q^2|}{\mu^2}}, \quad \beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{3}, \quad \mu - \text{масса кварка,}$$

n_f — число ароматов, которые возможны в петле при данном q^2

(в КЭД $\beta_0 = -\frac{2}{3}$, $n_f = 1$).

Другой знак β_0 за счет глюонной петли.

В результате на малых расстояниях (большие q^2) константа мала, и кварки ведут себя как свободные. Это явление называется **асимптотической свободой** (одно из главнейших свойств неабелевых калибровочных теорий!!!).

С ростом расстояния (малые q^2) константа растет, что служит указанием на невозможность развести цветные кварки на бесконечно большое расстояние из-за рождения $\bar{q}q$ -пар и глюонов. Хотя эта проблема конфайнмента до конца не решена.

Кроме того, свободные уравнения Янга-Миллса помимо волновых решений имеют нетривиальные инстантонные решения, которые, как полагают, ответственны за структуру вакуума в КХД, отличную от КЭД, где вакуум — $A = 0$.

Экспериментальные успехи и подтверждение КХД:

(в лекциях Л.И.Сарычевой)

1. Нарушение скейлинга в партонной модели.
2. Наблюдение 3-струйных событий в e^+e^- -аннигиляции (косвенное доказательство существования глюонов).
3. ...

Рекомендуемая литература

1. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков. Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
2. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
3. Дж.Д.Бьёркен, С.Д.Дрелл. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978.
4. А.А.Славнов, Л.Д.Фадеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
5. А.В.Андреев. Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. М.: Наука, 1981.
6. Ф.Индурайн. Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
7. К.Хуанг. Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.

Александр Михайлович Снигирев

Введение в квантовую хромодинамику

Препринт НИИЯФ МГУ 2004- 11/750

Работа поступила в ОНТИ 25 мая 2004 г.

Издательство УНЦ ДО

ИД №00545 от 06.12.1999 г.

117246, Москва, ул. Обручева, 55А
Тел./факс (095) 718-6966, 718-7767, 718-7785
e-mail: izdat@abiturcenter.ru
<http://www.abiturcenter.ru/izdat/>

Подписано в печать 25.05 2004 г. Формат 60 × 90/16
Бумага офсетная №1. Усл.печ.л. 1,22
Тираж 50 экз. Заказ №619

Отпечатано в Мини-типографии УНЦ ДО
<http://www.abiturcenter.ru/print/>
в полном соответствии с качеством
представленного оригинала-макета